Geometria affine del piano.

Se $S \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ è sottospazio affine

$$\dim S \begin{cases} 0 \Rightarrow S = \{P\} \text{ punto} \\ 1 \Rightarrow S \text{ è una retta.} \\ 2 \Rightarrow S = \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \end{cases}$$

Se S è una retta, allora S è il sottospazio affine passante per $Q \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ $(Q = (q_1, q_2))$ e parallelo a $W \subseteq \mathbb{R}^2$ con $\dim W = 1$, allora $W = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}\right)$ con $\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Allora $P \in S$ $(P = (x, y)) \iff \overrightarrow{QP} \in W$

$$\iff \begin{pmatrix} x - q_1 \\ y - q_2 \end{pmatrix} \in \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}\right)$$

$$\iff \begin{pmatrix} x - q_1 & l \\ y - q_2 & m \end{pmatrix} \text{ ha rango } 1$$

$$\iff \det \begin{pmatrix} x - q_1 & l \\ y - q_2 & m \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff m(x - q_1) = l(y - q_2)$$

$$\iff m(x - q_1) - l(y - q_2) = 0 \longleftarrow \text{equazione cartesiana della retta}$$

La stessa retta ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x - q_1 = l \cdot t \\ y - q_2 = m \cdot t \end{cases} \iff \begin{cases} x = q_1 + lt \\ y = q_2 + mt \end{cases}$$

Dalla geometria euclidea sappiamo che per due punti nel piano passa una ed una sola retta (i due punti sono distinti). Siano $Q, R \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$

$$Q = (q_1, q_2), \qquad R = (r_1, r_2)$$

Vale che se $Q, R \in S$ con S una retta di giacitura W ($\dim W = 1$), allora $\overrightarrow{QR} \in W$. Vale che

$$\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} r_1 - q_1 \\ r_2 - q_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{QR} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ perché } Q \neq R$$

Quindi $\overrightarrow{QR}$ è un vettore non nullo in un sottospazio vettoriale di dimensione 1. Pertanto $W = \operatorname{span}(\overrightarrow{QR})$. Pertanto la retta passante per Q ed R è il sottospazio affine passante per Q (o per R) e parallelo al sottospazio vettoriale $\operatorname{span}(\overrightarrow{QR})$. Quindi se $P = (x, y)$, allora

$$P \in S \iff \overrightarrow{QP} \in \operatorname{span}(\overrightarrow{QR})$$

$$\iff \begin{pmatrix} x - q_1 \\ y - q_2 \end{pmatrix} \in \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} r_1 - q_1 \\ r_2 - q_2 \end{pmatrix}\right)$$

Quest'ultima condizione ci dice che equazioni parametriche di S sono

$$\begin{cases} x - q_1 = (r_1 - q_1) \cdot t \\ y - q_2 = (r_2 - q_2) \cdot t \end{cases} \iff \begin{cases} x = q_1 + (r_1 - q_1)t \\ y = q_2 + (r_2 - q_2)t \end{cases}$$

Inoltre quest'ultima condizione è equivalente a

$$\det \begin{pmatrix} x - q_1 & r_1 - q_1 \\ y - q_2 & r_2 - q_2 \end{pmatrix} = 0$$

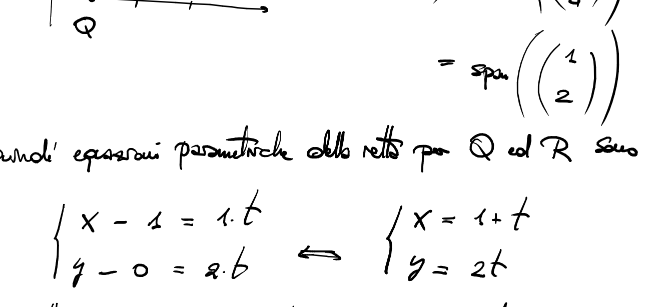
$$\iff (r_2 - q_2)(x - q_1) - (r_1 - q_1)(y - q_2) = 0$$

e quest'ultima è l'equazione cartesiana della retta tra due punti.

Notiamo che se $r_1 - q_1 \neq 0$, allora la precedente equazione è equivalente a

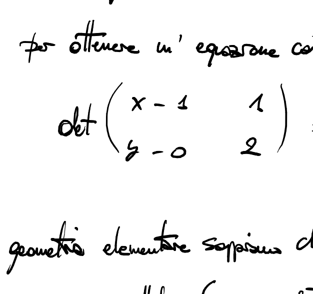
$$y = q_2 + \left(\frac{r_2 - q_2}{r_1 - q_1}\right)(x - q_1)$$

Geometricamente la condizione $r_1 - q_1 \neq 0$ $(\iff r_1 \neq q_1)$ significa che Q ed R non sono allineati verticalmente, dunque l'ultima equazione vale solo per rette non verticali.



Esempio: calcoliamo equazioni parametriche e cartesiane della retta per

$$Q = (1, 0) \quad \text{e} \quad R = (3, 4)$$



la giacitura di tale retta è

$$\operatorname{span}(\overrightarrow{QR}) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

quindi equazioni parametriche della retta per Q ed R sono

$$\begin{cases} x - 1 = 1 \cdot t \\ y - 0 = 2 \cdot t \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \end{cases}$$

per ottenere un'equazione cartesiana imponiamo che

$$\det \begin{pmatrix} x - 1 & 1 \\ y - 0 & 2 \end{pmatrix} = 0 \iff 2(x - 1) - y = 0$$

$$\iff 2x - y - 2 = 0$$

Dalla geometria elementare sappiamo che due rette nel piano possono essere

- parallele (e, come sottocaso, coincidenti)
- incidenti.

Due rette r ed s sono parallele se e solo se

o $r = s$ oppure r ed s non hanno punti in comune

Nei termini che abbiamo introdotto finora, nel piano affine vale che

r ed s sono parallele $\iff$ r ed s hanno la medesima giacitura.

Cerchiamo di comprendere come effettuare tale transizione dalla geometria elementare alla formulazione in termini di sottospazi affini. Siano dunque $r, s \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ due rette. Se $r = s$, allora esse hanno la medesima giacitura. Supponiamo ora che $r \neq s$ e supponiamo che r ed s <u>non</u> abbiano punti in comune.

Possiamo scrivere che

r è il sottospazio affine passante per $Q = (q_1, q_2)$ e parallelo a $W = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}\right)$

s è il sottospazio affine passante per $Q' = (q_1', q_2')$ e parallelo a $W' = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} l' \\ m' \end{pmatrix}\right)$

Allora r ed s hanno equazioni parametriche

$$r: \begin{cases} x = q_1 + lt \\ y = q_2 + mt \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = q_1' + l' \cdot \tau \\ y = q_2' + m' \tau \end{cases}$$

Dire che r ed s <u>non</u> hanno punti in comune è equivalente a dire che <u>non</u> esistono $\bar{t}, \bar{\tau} \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} q_1 + l\bar{t} = q_1' + l'\bar{\tau} \\ q_2 + m\bar{t} = q_2' + m'\bar{\tau} \end{cases} \iff \begin{cases} l\bar{t} - l'\bar{\tau} = q_1' - q_1 \\ m\bar{t} - m'\bar{\tau} = q_2' - q_2 \end{cases}$$

Ciò vuol dire che il sistema nelle variabili t e τ:

$$\begin{cases} lt - l'\tau = q_1' - q_1 \\ mt - m'\tau = q_2' - q_2 \end{cases} \quad \text{non è compatibile}$$

Scriviamo ora la matrice dei coefficienti A e la matrice completa $(A|b)$:

$$A = \begin{pmatrix} l & -l' \\ m & -m' \end{pmatrix} \qquad (A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} l & -l' & q_1' - q_1 \\ m & -m' & q_2' - q_2 \end{array}\right)$$

Ora, il sistema è compatibile $\iff \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|b)$. Dato che il sistema non è compatibile, deve dunque essere $\operatorname{rg}(A) \neq \operatorname{rg}(A|b)$ (per il teorema di Rouché-Capelli). Dato che né A né $(A|b)$ è la matrice nulla, i due ranghi devono essere diversi da zero. Affinché i due ranghi siano tra loro diversi, l'unica possibilità è che:

$$\operatorname{rg}(A) = 1 \quad \text{e} \quad \operatorname{rg}((A|b)) = 2$$

(dato che $\operatorname{rg}(A) \leq 2$ e $\operatorname{rg}(A|b) \leq \min\{2, 3\} = 2$).

Quindi, dato che $\operatorname{rg}(A) = 1$, deduciamo che le colonne di A sono tra loro linearmente dipendenti, ovvero

$$\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} -l' \\ -m' \end{pmatrix} \text{ sono linearmente dipendenti} \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} l' \\ m' \end{pmatrix} \text{ sono linearmente dipendenti} \iff$$

$$\iff \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}\right) = \operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l' \\ m' \end{pmatrix}\right\}\right) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} l' \\ m' \end{pmatrix}\right)$$

$$\left(\text{dato che } \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ed } \begin{pmatrix} l' \\ m' \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\iff \text{giacitura di } r = \text{giacitura di } s$$

Questo mostra che, nel piano, due rette distinte sono parallele se e solo se hanno la medesima giacitura.

Consideriamo ora il caso di due rette $r, s \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, distinte tra loro e non parallele. La geometria elementare ci dice che esse si intersecano in un unico punto. Proviamo a derivare ciò dal nostro formalismo.

r: retta passante per $Q = (q_1, q_2)$ e parallela a $W = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}\right)$

s: retta passante per $Q' = (q_1', q_2')$ e parallela a $W' = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} l' \\ m' \end{pmatrix}\right)$

Ora supponiamo che $W \neq W'$. Ciò implica che i vettori

$$\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} l' \\ m' \end{pmatrix} \text{ sono linearmente indipendenti}$$

Per calcolare le (possibili) intersezioni di r ed s, consideriamo equazioni parametriche delle due rette:

$$r: \begin{cases} x = q_1 + lt \\ y = q_2 + mt \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = q_1' + l'\tau \\ y = q_2' + m'\tau \end{cases}$$

e ci chiediamo quindi se il sistema nelle variabili t e τ:

$$\begin{cases} q_1 + lt = q_1' + l'\tau \\ q_2 + mt = q_2' + m'\tau \end{cases} \iff \begin{cases} lt - l'\tau = q_1' - q_1 \\ mt - m'\tau = q_2' - q_2 \end{cases}$$

sia compatibile o meno. Ora, la sua matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} l & -l' \\ m & -m' \end{pmatrix}$$

Ora, dato che $\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$ ed $\begin{pmatrix} l' \\ m' \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti, lo sono anche $\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$ ed $\begin{pmatrix} -l' \\ -m' \end{pmatrix}$, ovvero la matrice A ha rango 2. Pertanto per il teorema di Cramer otteniamo che il sistema lineare ha una ed una sola soluzione, ovvero che le due rette r ed s hanno una ed una sola intersezione.

Posizione reciproca tra sottospazi affini

Introduciamo un linguaggio che generalizza quanto abbiamo visto per le rette nel piano e la loro posizione reciproca.

<u>Def</u>: siano $S, S' \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ due sottospazi affini; allora S ed S' si dicono:

i. <u>incidenti</u> se $S \cap S' \neq \emptyset$
(e <u>coincidenti</u> se $S = S'$)

ii. <u>paralleli</u> (e scriviamo $S \parallel S'$) se
giacitura di S $\subseteq$ giacitura di S' oppure
giacitura di S' $\subseteq$ giacitura di S

iii. <u>sghembi</u> se non sono incidenti né paralleli

Geometria affine dello spazio

Se $S \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ è un sottospazio affine, allora

$$\dim S \begin{cases} 0 \Rightarrow S \text{ è un punto} \\ 1 \Rightarrow S \text{ è una retta} \\ 2 \Rightarrow S \text{ è un piano} \\ 3 \Rightarrow S = \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}} \end{cases}$$

Se $\dim S = 1$, allora S è una retta e dunque è un sottospazio affine passante per un punto $Q \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$ e parallelo a $W \subseteq \mathbb{R}^3$ con $\dim W = 1$, dunque $W = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}\right)$. Pertanto se $P = (x, y, z) \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$

$$P \in S \iff \overrightarrow{QP} \in W \iff \begin{cases} x - q_1 = lt \\ y - q_2 = mt \\ z - q_3 = nt \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = q_1 + lt \\ y = q_2 + mt \\ z = q_3 + nt \end{cases} \quad \text{equazioni parametriche di } S$$