Geometria affine dello spazio

In $\mathbb{A}^3_\mathbb{R}$ la retta passante per $Q=(q_1,q_2,q_3)$ e parallela a $W = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} l\\ m\\ n\end{pmatrix}\right)$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = q_1 + lt\\ y = q_2 + mt\\ z = q_3 + nt\end{cases}$$

Per trovare equazioni cartesiane di tale retta, consideriamo la matrice

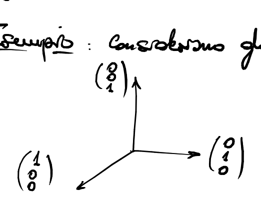
$$\begin{pmatrix} l & x-q_1\\ m & y-q_2\\ n & z-q_3\end{pmatrix}$$ e imponiamo che essa abbia rango 1

Per farlo, effettuiamo la gradinizzazione fino a portarla nella forma

$$\begin{pmatrix} 1 & *\\ 0 & \boxed{*}\\ 0 & \boxed{*}\end{pmatrix}$$ imponiamo che queste due entrate siano nulle, ricavando due equazioni di primo grado in x, y e z.

Queste due equazioni saranno le equazioni cartesiane della retta.

<u>Esempio</u>: consideriamo gli assi coordinati: ad esempio possiamo



considerare la retta passante per $O=(0,0,0)$ e parallela a $\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$

le equazioni parametriche di tale retta sono:

$$\begin{cases} x = t\\ y = 0\\ z = 0\end{cases}$$

per ottenere equazioni cartesiane imponiamo che la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & x-0\\ 0 & y-0\\ 0 & z-0\end{pmatrix}$$ abbia rango 1

$$\parallel$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x\\ 0 & y\\ 0 & z\end{pmatrix}$$ la matrice è già nella forma che vogliamo ottenere, quindi non ci resta che imporre che le entrate $(2,2)$ e $(3,2)$ siano nulle, ovvero

$$\begin{cases} y = 0\\ z = 0\end{cases}$$

Anche in $\mathbb{A}^3_\mathbb{R}$ per due punti distinti passa una e una sola retta.
Per determinarla consideriamo $Q,R \in \mathbb{A}^3_\mathbb{R}$, $Q \neq R$,

$$Q=(q_1,q_2,q_3) \qquad R=(r_1,r_2,r_3)$$

Come abbiamo ragionato per il piano, vale che la giacitura della retta passante per Q ed R ha dimensione 1, e dunque è uguale a

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{QR}\right)$$

Pertanto equazioni parametriche di tale retta sono:

$$\begin{cases} x = q_1 + (r_1-q_1)t\\ y = q_2 + (r_2-q_2)t\\ z = q_3 + (r_3-q_3)t\end{cases}$$

Se vogliamo equazioni cartesiane, ragioniamo come prima.
Se invece partiamo da equazioni cartesiane di una retta in $\mathbb{A}^3_\mathbb{R}$

$$\begin{cases} ax+by+cz = d\\ a'x+b'y+c'z = d'\end{cases}$$

allora per ottenere equazioni parametriche della retta quello che facciamo è determinare la generica soluzione del sistema sopra descritto.

<u>Esempio</u>: consideriamo la retta in $\mathbb{A}^3_\mathbb{R}$ di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x+2y-z = 4\\ x-y+2z = 3\end{cases}$$

per determinare equazioni parametriche della retta risolviamo il sistema lineare:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix} \qquad (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4\\ 1 & -1 & 2 & 3\end{array}\right)$$

applichiamo l'algoritmo di gradinizzazione di Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & -3 & 3 & -1\end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{cases} x+2y-z = 4\\ -3y+3z = -1\end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2y+z+4 = -2z-\frac{2}{3}+z+4 = -z+\frac{10}{3}\\ y = z+\frac{1}{3}\end{cases}$$

una soluzione particolare è dunque $\left(\frac{10}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$

consideriamo il sistema omogeneo associato, che ha matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1\\ 0 & -3 & 3\end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\to \begin{cases} x+2y-z=0\\ y-z=0\end{cases} \to \begin{cases} x=-z\\ y=z\end{cases}$$

pertanto la generica soluzione del sistema omogeneo associato è della forma

$$\begin{pmatrix} -z\\ z\\ z\end{pmatrix} = z\cdot\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

quindi la generica soluzione del sistema lineare è del tipo

$$\begin{pmatrix} 10/3\\ 1/3\\ 0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

pertanto equazioni parametriche della retta sono date da

$$\begin{cases} x = 10/3 - t\\ y = 1/3 + t\\ z = t\end{cases}$$

In $\mathbb{A}^3_\mathbb{R}$, oltre alle rette abbiamo i piani. Un piano è un sottospazio affine di dimensione 2, dunque è determinato da un punto $Q \in \mathbb{A}^3_\mathbb{R}$ e da una giacitura $W \subseteq \mathbb{R}^3$ di dimensione 2.
Allora

$$Q=(q_1,q_2,q_3) \quad \text{e} \quad W = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} l_1\\ m_1\\ n_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l_2\\ m_2\\ n_2\end{pmatrix}\right)$$

con $\begin{pmatrix} l_1\\ m_1\\ n_1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} l_2\\ m_2\\ n_2\end{pmatrix}$ linearmente indipendenti, ovvero tali che

$$rg\begin{pmatrix} l_1 & l_2\\ m_1 & m_2\\ n_1 & n_2\end{pmatrix} = 2$$

Da questa descrizione deriviamo equazioni parametriche: se $P=(x,y,z)$ allora $P \in$ piano passante per Q e parallelo a W se e solo se

$$\overrightarrow{QP} \in W \iff \overrightarrow{QP} \in \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} l_1\\ m_1\\ n_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l_2\\ m_2\\ n_2\end{pmatrix}\right)$$

$\iff$ esistono $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\overrightarrow{QP} = t_1\cdot\begin{pmatrix} l_1\\ m_1\\ n_1\end{pmatrix} + t_2\cdot\begin{pmatrix} l_2\\ m_2\\ n_2\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x-q_1\\ y-q_2\\ z-q_3\end{pmatrix} = t_1\cdot\begin{pmatrix} l_1\\ m_1\\ n_1\end{pmatrix} + t_2\cdot\begin{pmatrix} l_2\\ m_2\\ n_2\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x = q_1 + t_1 l_1 + t_2 l_2\\ y = q_2 + t_1 m_1 + t_2 m_2\\ z = q_3 + t_1 n_1 + t_2 n_2\end{cases}$$ equazioni parametriche del piano.

Se dalle equazioni parametriche vogliamo passare a quelle cartesiane, consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & x-q_1\\ m_1 & m_2 & y-q_2\\ n_1 & n_2 & z-q_3\end{pmatrix}$$ e imponiamo che essa abbia rango 2

Ciò può essere fatto in due modi:

- gradinizzando e imponendo che l'ultima riga sia completamente nulla
- se imponiamo che il determinante di questa matrice sia nullo, allora otteniamo che la matrice avrà rango <3, ovvero ≤ 2; d'altra parte, però, per ipotesi sappiamo che $rg\begin{pmatrix} l_1 & l_2\\ m_1 & m_2\\ n_1 & n_2\end{pmatrix} = 2$ quindi il rango della matrice 3×3 è sicuramente sempre ≥ 2; concludendo, in questo caso imporre che il determinante sia nullo equivale a imporre che la matrice abbia rango 2

In ciascuno dei due casi otteniamo una equazione di primo grado in x, y, z, che è un'equazione cartesiana del piano.

<u>Esempio</u>: calcoliamo un'equazione cartesiana del piano $S \subseteq \mathbb{A}^3_\mathbb{R}$ passante per $Q=(1,-1,0)$ e parallelo al sottospazio vettoriale $W = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 2\\ 1\\ -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\right)$

i due vettori $\begin{pmatrix} 2\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti e dunque $\dim W = 2$; un'equazione cartesiana di S è data da:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & x-1\\ 1 & 1 & y+1\\ -1 & 1 & z\end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff 2\cdot 1\cdot z + 1\cdot(y+1)\cdot(-1) + (x-1)\cdot 1\cdot 1 -$$

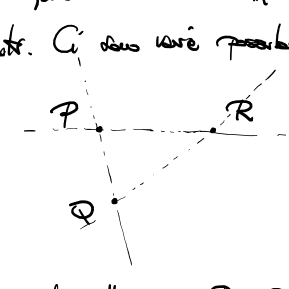
$$- (x-1)\cdot 1\cdot(-1) - 1\cdot 1\cdot z - 2\cdot(y+1)\cdot 1 = 0$$

$$\iff z - 3(y+1) + 2(x-1) = 0$$

$$\iff 2x - 3y + z = 5$$

Come per due punti distinti passa una sola retta, parimenti per tre punti non allineati di $\mathbb{A}^3_\mathbb{R}$ passa un unico piano.

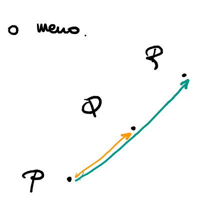
Preliminarmente, cerchiamo di comprendere come determinare se tre punti (di $\mathbb{A}^2_\mathbb{R}$ o equivalentemente di $\mathbb{A}^3_\mathbb{R}$ o di $\mathbb{A}^n_\mathbb{R}$) P, Q, R siano o meno allineati. Ci sono varie possibilità:



(i) calcoliamo le rette per P e Q e per P ed R e verifichiamo se siano la stessa retta

(ii) calcoliamo la retta per P e Q e verifichiamo se R vi appartenga o meno.

(iii)



P, Q, R sono allineati se e solo se $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ sono linearmente dipendenti (ovvero sono proporzionali)

Supponiamo dunque che siano dati $P, Q, R \in \mathbb{A}^3_\mathbb{R}$ non allineati

$$P=(p_1,p_2,p_3), \quad Q=(q_1,q_2,q_3), \quad R=(r_1,r_2,r_3)$$

Sia S il piano passante per questi tre punti e sia W la sua giacitura. Allora $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{QR} \in W$. Pertanto, dato che $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ sono linearmente indipendenti, allora sappiamo che, dato che $\dim W = 2$

$$W = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\right)$$

Quindi S è il piano passante per P (o Q o R) e di giacitura $\operatorname{span}\left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\right)$. In questo modo otteniamo equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = p_1 + t_1(q_1-p_1) + t_2(r_1-p_1)\\ y = p_2 + t_1(q_2-p_2) + t_2(r_2-p_2)\\ z = p_3 + t_1(q_3-p_3) + t_2(r_3-p_3)\end{cases}$$

Se $(x,y,z) \in \mathbb{A}^3_\mathbb{R}$, allora $(x,y,z) \in S$ se e solo se

$$\begin{pmatrix} x-p_1\\ y-p_2\\ z-p_3\end{pmatrix} \in \operatorname{span}\left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\right) \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} q_1-p_1 & r_1-p_1 & x-p_1\\ q_2-p_2 & r_2-p_2 & y-p_2\\ q_3-p_3 & r_3-p_3 & z-p_3\end{pmatrix} \text{ ha rango } 2$$

$$\iff \det(\text{precedente matrice}) = 0.$$

Consideriamo ora la posizione reciproca tra un piano e una retta. Se $S \subseteq \mathbb{A}^3_\mathbb{R}$ è un piano di giacitura W ed $S' \subseteq \mathbb{A}^3_\mathbb{R}$ è una retta di giacitura W', allora S ed S' sono paralleli se e solo se $W' \subseteq W$. In altre parole, se $W = \operatorname{span}(w_1, w_2)$ e $W' = \operatorname{span}(w')$, allora

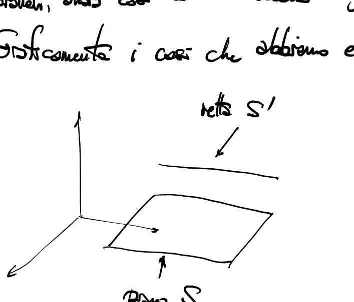
$$W' \subseteq W \iff w' \in \operatorname{span}(w_1, w_2) \iff$$

$$\iff w' \text{ è combinazione lineare di } w_1 \text{ e } w_2$$

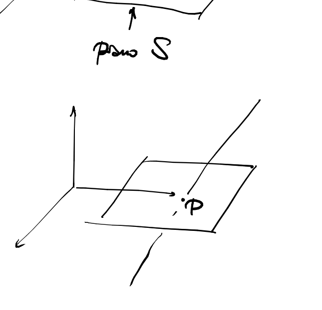
<u>Esempio</u>: sia S il piano in $\mathbb{A}^3_\mathbb{R}$ passante per $Q=(1,0,-2)$ e parallelo a $W = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right)$; se vogliamo determinare una retta $S' \subseteq \mathbb{A}^3_\mathbb{R}$ parallela ad S e passante per $Q'=(-1,0,2)$, allora è sufficiente scegliere come giacitura di S' lo span di un vettore in W, come ad esempio $\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$; pertanto la retta S' passante per Q' e parallela a $\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}\right)$ è parallela ad S.

Se un piano $S \subseteq \mathbb{A}^3_\mathbb{R}$ e una retta $S' \subseteq \mathbb{A}^3_\mathbb{R}$ non sono paralleli, allora è possibile mostrare (attraverso l'uso del teorema di Cramer, come abbiamo fatto nel caso di due rette non parallele in $\mathbb{A}^2_\mathbb{R}$) che S ed S' si intersecano in un unico punto. Per calcolare tale punto, se abbiamo equazioni cartesiane per S ed S', allora l'intersezione $S \cap S'$ sarà quell'unico punto le cui coordinate soddisfano tutte e tre le equazioni cartesiane che abbiamo combinando quella di S con le due di S'.

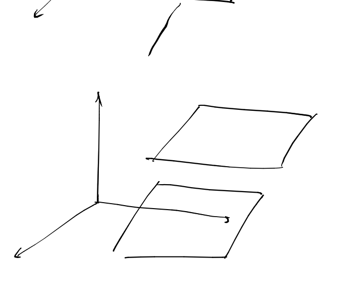
Dati due piani $S, S' \subseteq \mathbb{A}^3_\mathbb{R}$ di giaciture rispettivamente W e W', allora S ed S' sono paralleli se e solo se $W = W'$. Se i piani non sono paralleli, allora essi si intersecano lungo una retta.
Graficamente i casi che abbiamo esaminato sono:



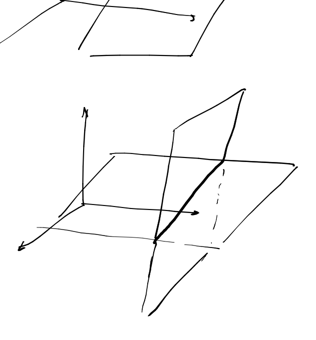
S ed S' sono paralleli
$S \parallel S'$



S ed S' sono incidenti
$S \cap S' = \{P\}$



S ed S' sono paralleli
$S \parallel S'$



S ed S' sono incidenti
$S \cap S' = \{\text{retta}\}$