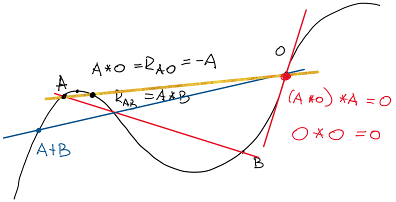
Lezione 11 dicembre 2023

lunedì 11 dicembre 2023 09:07

Visto: Data $C = (Z_p(F), F)$ cubica proiettiva liscia ($\Rightarrow$ irriducibile) si può definire op. interna $+$



$$*: C \times C \longrightarrow C$$

$$A * B = R_{AB}$$

dove $\{R_{AB}, A, B\} = C \cap \overline{AB}$

e se $A = B$, invece $\overline{AB}$ cons. $t_A C$

Def. poi $+: C \times C \longrightarrow C$

$$\underline{A+B} := R_{AB} * O = \underline{(A * B) * O}$$

Teo: $(C, +)$ è gruppo abeliano.

Dim.: Neutro: O, infatti

$$A + O = (A * O) * O = A$$

$$= O + A$$

infatti: la commutatività segue dalla commut. di $*$:

$$A * B = B * A \,; \quad A+B = (A*B) * O, \quad B + A = (B*A) * O$$

Opposto: dato $A \in C$, affermo che

$$-A = R_{AO} = A * O$$

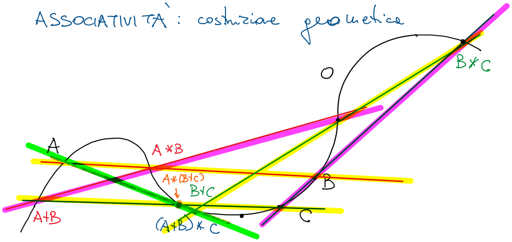
$$R_{AO} + A = (\underbrace{R_{AO}} * A) * O$$

$$(\underbrace{(A*O)*A}_{=O}) * O \quad = O$$

$O * O = O$ perché O è flesso

$\Rightarrow R_{AO} = -A$

ASSOCIATIVITÀ: costruzione geometrica



Voglio dimostrare che $(A+B)+C = A+(B+C)$

$(A+B)+C = ((A+B)*C)*O$

=(

$A+(B+C) = (A*(B+C))*O$

$\Longleftrightarrow \quad (A+B)*C = A*(B+C)$

Cons. la cubica riducibile unione delle rette:

$D: \ \overline{AB} \cup \overline{A+B, C} \cup \overline{O, B+C}$

$$C \cap D = \{O, A, B, C, A+B, B+C, A*B, (A+B)*C, B*C\}$$

Supp. per semplicità che i 9 punti siano tutti distinti

Abbiamo 9 punti, int. di 2 cubiche

proiettive

Osservo che B, C e $B * C$ sono allineati per def. di $*$

$\Longrightarrow$ Ricordo il Teo: se d^2 punti Γ

$\Gamma = C \cap D$ curve di grado d

e se $\exists\ n < d$ t.c. $n \cdot d$ punti di Γ sono contenuti in una curva $\in$ di grado n irriducibile

$\Longrightarrow$ i rimanenti $d^2 - nd = d(d-n)$ sono cont. in curve di grado $d-n$

Nel nostro caso: i rimanenti $9-3=6$ punti sono contenuti in una conica

$\{\underline{0}, A, \underline{A+B}, B+C, \underline{A*B}, (A+B)*C)$

Inoltre: $0, A*B, A+B$ sono allineati per def. di $+$

$\Longrightarrow$ la conica è degenere e quindi i rimanenti 3 punti sono allineati

$\{A, B+C, (A+B)*C\} \subseteq \overline{A\ B{+}C}$

$(A+B)*C \overset{?}{=} \underbrace{A*(B+C)}$ sì!

è il terzo punto di intersezione in $\overline{A\ (B{+}C)} \cap C$

∼. ∼. ∼.

Abbiamo: $(C, 0, +)$ gruppo abeliano

Esercizio: Se su C fissiamo un altro punto di flesso O', viene def. un'operazione $+'$, si trova una struttura di gruppo diversa, con la seguente proprietà:

$$P +' Q = P + Q - O'$$

CONS.: le 2 strutture di gruppo sono ISOMORFE:

$$(C, O, +) \longrightarrow (C, O', +')$$

$$P \longrightarrow P - O'$$

$$(= P +' O)$$

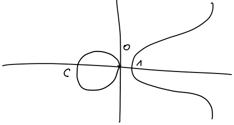
Teor: C cubica proiettiva liscia ha esatt. 9 flessi, a 3 a 3 allineati.

Dim. (Sernesi Geo 1, p. 413)

Sappiamo già che $\exists$ 1 flesso, e con proiettività lo mando $(0:0:1)$ con tg di flesso $x_0 = 0$; abbiamo visto possiamo supp. l'eq. affine in U_0 sia

$$\boxed{\overset{c\neq 0,1}{y^2 = x(x-1)(x-c)}}$$ eq. Legendre

$$y^2 = x^3 - (c+1)x^2 + cx$$



$$f(x,y) = y^2 - x^3 + (c+1)x^2 - cx = 0$$

Calcolo il determinante hessiano deomogeneizzato

$$h(x,y) = 8 \cdot \left[(y^2 + cx)(3x - (c+1)) - ((c+1)x - c)^2 \right]$$

non sono in posiz. elem. risp. a $(0:0:1)$ però conv. com. col. R_y per semplicità della sua espressione. Non troverò biiezione tra $Z(f) \cap Z(h)$

cons. $\dfrac{h(x,y)}{8}$

$$R_y\left(f, \frac{h(x,y)}{8}\right) = 3x^4 - 4(c+1)x^3 + 6cx^2 - c^2$$

$$= R(x) :$$

Esercizio :
$R(0) \neq 0$, $R(1) \neq 0$
$R(c) \neq 0$

Domanda: $R(x)$ ha radici multiple?

Guardo il suo discriminante:

$$R_x(R(x), R'(x)) = c^4\left((c+1)^2 - 4c\right)^2$$

$$= c^4 (c-1)^4 = 0$$

$\Longleftrightarrow$ $c = 0$ opp. $c = 1$: MA se la curva è liscia.

$\Rightarrow$ $R(x)$ su $\mathbb{C}$ ha 4 radici distinte

x_1, x_2, x_3, x_4

sono le prime coordinate di punti di

$Z(f) \cap Z(h)$

Sostituisco il valore $x = x_i$ in $f(x,y)$

e in $h(x,y)$; siccome in entrambi i polinomi appare la var. y solo in grado 2 se (x_i, y_i) annulla entrambi

$\Rightarrow (x_i, -y_i)$ annulla entrambi

$\Rightarrow \forall$ radice x_i di $R(x)$, c'è almeno 1 punto in $Z(f) \cap Z(h)$ $\Rightarrow$ c'è anche $(x_i, -y_i)$
(x_i, y_i)

È possibile dimostrare che $y_i \neq 0$ $\forall i = 1, \dots, 4$

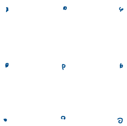
$$\left(\begin{array}{ll} y^2 = x(x-1)(x-c), & y_i^2 = x_i(x_i-1)(x_i-c) \\ y_i^2 = 0 \iff & x_i = 0, 1, c \end{array} \right)$$

$\Rightarrow$ in $Z(f) \cap Z(h)$ ci sono almeno 8 punti distinti;

non ce ne possono essere di più, quindi li ho trovati tutti

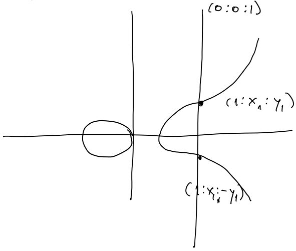
$$\Rightarrow Z_p(F) \cap Z_p(H_F) = 9 \text{ punti} = \{(0:0:1), 8 \text{ punti in } U_0\}$$
$$(1 : x_i, \pm y_i)$$

Ultima parte: comunque prendo 2 flessi, la retta che li congiunge contiene un terzo flesso



Infatti: se cons. 2 flessi del tipo

$O_1 = (1:\bar{x}:\bar{y})$ e $(1:\bar{x}:-\bar{y}) = O_2$



la retta $\overline{O_1 O_2} \ni (0:0:1)$ che è flesso

retta affine ↑ $x = \bar{x}$

$x - \bar{x} = 0$

omogeneizzo $x_1 - \bar{x} \cdot x_0 = 0$

Infine: se O e O' sono 2 flessi

non sono del tipo $(1:\bar{x}:\bar{y})$ e $(1:\bar{x}:-\bar{y})$

cons. una proiettività che mandi O in

$(0:0:1)$ e tg di flesso in $x_0 = 0$

$\Rightarrow$ nelle nuove coordinate $O' \in U_0$

$O' = (1:\bar{\bar{x}}:\bar{\bar{y}})$

$\Rightarrow O'' = (1:\bar{\bar{x}}:-\bar{\bar{y}})$ è ancora

flesso e $O'' \in \overline{OO'}$

↓

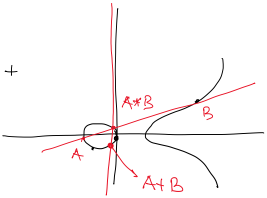
$x_1 - \bar{x}\, x_0 = 0$

Vedremo: • $(C, O, +)$, dato $A \in C$

si può cons. $n \cdot A$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

• si può ident. C con $S^1 \times S^1$

• $(0:0:1) = O$

• +