Lezione 12 dicembre 2023

martedì 12 dicembre 2023 09:14

Visto: C cubica liscia si può def. $(C, o, +)$

Oss.: $g(C) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} = 1$

Sono esempi CURVE ELLITTICHE

Si dimostra che ogni curva ell. astratta su $\mathbb{C}$

(moralmente: curva alg. astratta = sp. top. localmente omeomorfo a una curva affine, con condiz. di incollamento sulle intersezioni di aperti (IAG 3)
Si dà nozione di genere geometrico

Si dimostra che se $g = 1$ e la curva è liscia, allora $\exists$ un embedding della curva astratta nel piano proiettivo con immagine una cubica liscia.)

- Perché curve ellittiche?

Collegate con questioni di integrali ELLITTICI (vedere note prof. CAILOTTO) sono noti per calcolare lunghezza arco di ellisse, e in generale sono int. di funz. razionali)

LEGAMI CON ANALISI COMPLESSA

Def.: Cons. $\mathbb{C}$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

Cons. $\tau \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} \tau > 0$

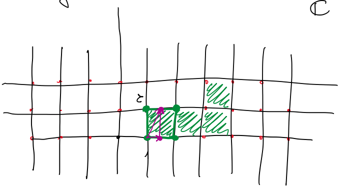
Allora $1, \tau$ sono $\mathbb{R}$ - LIN. INDIP.

Il sottogruppo additivo di $\mathbb{C}$

$$\Lambda_\tau := \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\langle \tau \rangle := \{ n + m\tau \ : n, m \in \mathbb{Z} \}$$

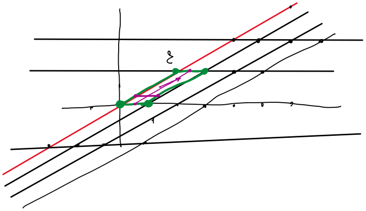
si dice LATTICE COMPLESSO

generato da $(1, z)$



$z = 1+i \longleftrightarrow (1,1)$

$m(1,0) + n(1,1) = (m+n, n)$



Cons $\mathbb{C}/\Lambda_z \ni [z]$: TORO COMPLESSO

$z \sim w \iff z - w \in \Lambda_z$

topologicamente $\underset{\text{omeo}}{\cong}$ toro

Come sup. reali sono tutte omeomorfe.

TEO. DI WEIERSTRASS :

La funzione $\wp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \underbrace{\sum_{w \in \Lambda_z \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right)}$$

serie complessa
converge uniformemente
sui compatti di $\mathbb{C}$

Su ogni compatto di $\mathbb{C}$ è una funzione olomorfa (cioè che ammette derivata nel senso complesso)

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; la deriv. complessa in $z_0 \in \mathbb{C}$ è

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Inoltre: Per costruzione $\wp(\Lambda_z) = \Lambda_z$

Prop. : $\displaystyle\sum_{w \in \Lambda_z \setminus \{0\}} \frac{1}{w^4} =: G_4$, $\displaystyle\sum_{w \in \Lambda_z \setminus \{0\}} \frac{1}{w^6} =: G_6$

convergono uniformemente & assolutamente a due punti di $\mathbb{C}$, g_4 e g_6 risp.

Teo.: La deriv. complessa di $\wp(z)$ verifica

$$(\wp'(z))^2 = 4\,\wp(z)^3 - 60\, g_4\, \wp(z) - 140\, g_6$$

Teo: La mappa

$$\mathbb{C} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$$
$$z \to (1 : \wp(z) : \wp'(z))$$

induce una mappa

$$W : \mathbb{C}/\Lambda_\tau \longrightarrow C_\tau \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$$

con C_τ cubica proiettiva liscia di eq.

$$x_2^2\, x_0 = 4\, x_1^3 - 60\, g_4\, x_1 x_0^2 - 140\, g_6\, x_0^3$$

Inoltre: W è un omeomorfismo

Inoltre: $\mathbb{C}/\Lambda_\tau \cong$ toro $\cong S^1 \times S^1$ risulta gruppo

su $S^1 \times S^1$ cons. la struttura di gruppo prodotto: $S^1 \subseteq \mathbb{C}$

$$S^1 = \{ z \mid |z| = 1 \}$$

$$z_1, z_2 \in S^1 \;;\; z_1 \cdot z_2 \in S^1$$

$$z \in S^1, \quad z = e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha$$

su $S^1 \times S^1 \ni (z_1, w_1)$
(z_2, w_2)

$$(z_1, w_1)\cdot(z_2, w_2) = (z_1 \cdot z_2, w_1 \cdot w_2)$$

Poi: C_τ : ha eq. $y^2 = 4x^3 - 60 g_4 x - 140 g_6$

ha un flesso $O = (0:0:1)$ con tg

flesso $x_0 = 0$

posso cons. $(C_\tau, O, +)$

Allora: W risulta ISOMORFISMO DI GRUPPI.

COLLEG. CON Teoria dei NUMERI:

EQUAZ. DI FERMAT:

$$x_0^3 + x_1^3 = x_2^3$$

cerco soluzioni in $\mathbb{Q}^3$

Wiles: non ci sono soluzioni "non banali"

a meno di fattori di proporz., quindi

in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}}$, le uniche soluzioni sono

$(0:1:1)$, $(1:0:1)$, $(1:1:0)$

Esercizio: i 3 punti sono flessi

$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ sottocampi

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_0^3 + x_1^3 - x_2^3$$

$\nabla F = \begin{pmatrix} 3x_0^2 \\ 3x_1^2 \\ 3x_2^2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ non ha zeri

$Z_p(F)$ è cubica liscia ($\Rightarrow$ irriducibile)
$\subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

fisso 1 flesso, ad es. $(0:1:1)$

e cons. $+$

$\Rightarrow$ $Z_p(F) \cap \mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}}$ è sottogruppo di $Z_p(F)$

Infatti: (vedere note Cailotto) è possibile scrivere eq. per le coordinate di $A+B$, in funz. delle coordinate di A & B, e sono quozienti di polinomi con coeff. razionali

Nel caso della cubica di Fermat:

$$Z_p(F) \cap \mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}} = \{(0:1:1), (1:0:1), (1:1:0)\} \cong \mathbb{Z}_3$$

~ . ~ . ~

In generale: $x_0^d + x_1^d = x_2^d$

$Z_p(x_0^d + x_1^d - x_2^d) \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

curve di Fermat; lisce

LEGAMI CON TENSORI SIMMETRICI

(ALGEBRA MULTILINEARE)

$$F = \sum_{\substack{i_j=0 \\ i_0+i_1+i_2=3}}^{3} a_{i_0 i_1 i_2} \; x_0^{i_0} \cdot x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2}$$

Gli $(a_{i_0 i_1 i_2})$ determinano un TENSORE di ordine 3, cioè un elemento

di $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$

Def.: $(\mathbb{C}^3)^* \otimes (\mathbb{C}^3)^* \otimes (\mathbb{C}^3)^* :=$ SV delle $f: \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$ che sono 3-lineari

poi: $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3 = \{ g : (\mathbb{C}^3)^* \times (\mathbb{C}^3)^* \times (\mathbb{C}^3)^* \longrightarrow \mathbb{C} \mid g \text{ è 3-lineare} \}$

DEFINIZIONE GENERALE:

Def.: $V \otimes_{\mathbb{C}} W$ is FREE VEC. SPACE over $\mathbb{C}$ (or $\mathbb{R}$) generated by the symbols

$$v \otimes w, \quad v \in V, \quad w \in W$$

modulo the following relations:

- $(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$
- $v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2$
- $\lambda (v \otimes w) = (\lambda v) \otimes w = v \otimes (\lambda w)$

By notational abuse, we shall write $v \otimes w$ for the class of $v \otimes w$.

Def.: Elements of $V \otimes W$ of the type $v \otimes w$ are called DECOMPOSABLE TENSORS.

PROPERTIES:

① UNIVERSAL MAPPING PROPERTY:

Let $f: V \times W \longrightarrow V \otimes W$

$f(v, w) := v \otimes w$

by construction, f is BILINEAR

Then $\forall$ $\mathbb{C}$- vector sp. U, & $\forall$ bilinear map
($\mathbb{R}$)

$$g: V \times W \longrightarrow U, \quad \exists!\ h \text{ linear}$$

$$h: V \otimes W \longrightarrow U \quad \text{s.t.} \quad g = h \circ f$$

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[dr, phantom, bend left=20, "\circlearrowleft"] & U \\
& V \otimes W \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

" $V \otimes W$ encodes all bilinear maps on $V \times W$ "

$g(v, w) \in U$

$h(v \otimes w) := g(v, w)$

2 In particular, the bilinear map

$$\alpha: V \times W \longrightarrow \underbrace{\operatorname{Hom}(V^*, W)}_{\text{linear app. } : V^* \longrightarrow W}$$

$$V^* = \operatorname{Hom}(V, \underset{\mathbb{R}}{\mathbb{C}})$$

$$(v, w) \longrightarrow \alpha_{(v, w)}$$

$$\text{s.t.} \quad \underset{L \in V^*}{\alpha_{(v,w)}(L)} := \underbrace{L(v)}_{\in \mathbb{C}} w$$

induces an isom. $V \otimes W \cong \operatorname{Hom}(V^*, W)$

in particular : $\dim V \otimes W = \dim \operatorname{Hom}(V^*, W) \overset{!}{=} a \cdot b$

③ COORDINATES OF A TENSOR

Fix $\mathcal{B}$ = basis of $V = \{v_1, \dots, v_a\}$

$\mathcal{C}$ = basis of $W = \{w_1, \dots, w_b\}$

Then $\mathcal{D} = \{ v_i \otimes w_j \ : \ 1 \le i \le a, \ 1 \le j \le b \}$
is a basis for $V \otimes W$.

$t \in V \otimes W \rightsquigarrow (t_{ij})$ ab coordinates

TENSORI SIMMETRICI:

Def: $S^3(\mathbb{C}^3) := \left\{ f \in \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3 \;\middle|\; f \text{ corrisponde a applicazione 3-lineare simmetrica} \right\}$

Let $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_m$ homogeneous of degree m

can associate T_f a symmetric tensor as follows:

f induces a multilinear map: fix a basis of $\mathbb{C}^n$

$$T_f : \underbrace{\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \dots \times \mathbb{C}^n}_{m \text{ times}} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$T_f(v_1, \dots, v_m) := \frac{1}{m!} \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, m\} \\ I \neq \phi}} (-1)^{m-|I|} \underbrace{f\Big(\sum_{i \in I} v_i\Big)}_{\in \mathbb{C}}$$

$|I| = \# I$

$f = f(x_1, \dots, x_n)$, write coordinates of $\sum_{i \in I} v_i$

T_f defines an element in $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^n \ni T_f$

$$t_{i_1 \dots i_m} = T_f(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_m})$$

$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$; it turns out that T_f is symmetric.

Example: $f \in \mathbb{C}[s,t]_3$, $f(s,t) = s^2 t$, $\overset{-2 \quad n-}{m=3}$

$T_f : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$, fix a bases $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ of $\mathbb{C}^2$

$$T_f\big(\overset{=v_1}{(s_1,t_1)}, \overset{=v_2}{(s_2,t_2)}, \overset{=v_3}{(s_3,t_3)}\big) = \frac{1}{6}\Big[\underset{I=\{1,2,3\}}{f(v_1+v_2+v_3)} -$$

$$- \underset{I=\{1,2\}}{f(v_1+v_2)} - \underset{I=\{1,3\}}{f(v_1+v_3)} - f(v_2+v_3) + \underset{I=\{1\}}{f(v_1)} + f(v_2) + f(v_3)\Big]$$

in coordinates: $f(v_1+v_2+v_3) = f(s_1+s_2+s_3, t_1+t_2+t_3)$

$= (s_1+s_2+s_3)^2 \cdot (t_1+t_2+t_3)$

$$\dots = \frac{1}{3}\left(\underline{s_1}\,\underline{s_2}\,\underline{t_3} + \underline{s_1}\,\underline{t_2}\,\underline{s_3} + \underline{t_1}\,\underline{s_2}\,\underline{s_3}\right)$$

and the corresponding tensor:

$$T_f = \frac{1}{3}\left(e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 + e_1 \otimes e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_1 \otimes e_1\right)$$

$t_{112} = \frac{1}{3}$, $t_{121} = \frac{1}{3}$, $t_{211} = \frac{1}{3}$, $t_{ijk} = 0$

$$\boxed{\begin{matrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \text{ slice } t_{..2}$$

$$\boxed{\begin{matrix} 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 \end{matrix}} \text{ slice } t_{..1}$$

Viceversa: To any symmetric tensor, can associate a homogenous polynomial.

$$T \rightsquigarrow \text{multilinear map } T(v_1, .., v_m) : \mathbb{C}^n \times .. \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$$

$$\rightsquigarrow f_T(v) := T(v, v, .., v)$$

ex.: $T = \frac{1}{3}\left(e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 + e_1 \otimes e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_1 \otimes e_1\right)$

$$f_T(v) = \frac{1}{3}\left(x_1 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_1 \cdot x_1\right) = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x_1^2 x_2$$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$| \; x_1^2 x_2$

$$f(s,t) = s^2 t$$