14 dicembre

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\sin(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_1^R \frac{\sin x}{x^p}\,dx \qquad p>1 \quad \text{è sommabile ?}$$

Si è sommabile. Per prima cosa $\frac{1}{x^p}\sin(x) \in C^0([1,+\infty))$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{x^p}\sin(x) \in L_{loc}[1,+\infty).$$

Poi, abbiamo

$$0 \le \left|\frac{1}{x^p}\sin(x)\right| = \frac{1}{x^p}|\sin x| \le \frac{1}{x^p}$$

Siccome $\overset{p>1}{\frac{1}{x^p}} \in L[1,+\infty) \stackrel{\text{confronto}}{\Longrightarrow} \frac{1}{x^p}|\sin x| \in L[1,+\infty)$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{x^p}\sin x \in L[1,+\infty).$$

Esempi di funzioni integrabili che non sono assolutamente integrabili

Utilizzeremo il fatto che $\frac{1}{[x]^p} \in L[1,+\infty) \iff p>1$

Esempi $\quad \frac{\sin x}{x^p} \in L[\pi,+\infty) \quad \forall \; p>0$.

Cioè $\quad \lim_{R\to+\infty} \int_\pi^R \frac{\sin x}{x^p}\,dx \in \mathbb{R} \quad \forall \; p>0$.

Abbiamo appena verificato il caso $p>1$.

Ci interessa il caso $0<p\leq 1$. In questo caso

$\frac{|\sin x|}{x^p} \notin L[\pi,+\infty)$ (lo dimostreremo fra poco).

1) Verifichiamo l'integrabilità $\forall \; 0<p\leq 1$

$$\int_\pi^R \frac{\sin x}{x^p}\,dx = \int_\pi^R \frac{1}{x^p}(-\cos x)'\,dx =$$

$$= -\frac{\cos x}{x^p}\Big]_\pi^R + \int_\pi^R \left(x^{-p}\right)'\cos x\,dx$$

$$= \underbrace{-\frac{\cos R}{R^p}}_{\xrightarrow{R\to+\infty} 0} - \frac{1}{\pi^p} - p\int_\pi^R \frac{\cos x}{x^{p+1}}\,dx \xrightarrow{R\to+\infty} L \in \mathbb{R}$$

Qui $\quad \lim_{R\to+\infty} \int_\pi^R \frac{\cos x}{x^{p+1}}\,dx \quad$ esiste finito

perché, essendo $p>0$, si ha $p+1>1$ e

poiché $0 \leq \left|\frac{\cos x}{x^{p+1}}\right| \leq \frac{|\cos x|}{x^{p+1}} \leq \frac{1}{x^{p+1}} \in L[\pi,+\infty)$

Segue per il confronto che $\frac{|\cos x|}{x^{p+1}} \in L[\pi,+\infty)$

$\implies \quad \frac{\cos x}{x^{p+1}} \in L[\pi,+\infty)$

Abbiamo dimostrato che $\forall \; p>0$,

$$\lim_{R\to+\infty} \int_\pi^R \frac{\sin x}{x^p}\,dx \in \mathbb{R}$$

Ora vediamo perché per $0 < p \leq 1$

si ha $\frac{|\sin x|}{x^p} \notin L[\pi, \infty)$

Supponiamo per assurdo che per un $0 < p \leq 1$

$$+\infty > \int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p}\,dx = \lim_{R \to +\infty} \int_{\pi}^{R} \frac{|\sin x|}{x^p}\,dx$$

$$+\infty > \int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p}\,dx = \lim_{n \to +\infty} \int_{\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x^p}\,dx$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left[\int_{\pi}^{2\pi} \frac{|\sin x|}{x^p}\,dx + \dots + \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x^p}\,dx \right]$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{j=1}^{n} \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x^p}\,dx$$

$$\geq \lim_{n \to +\infty} \sum_{j=1}^{n} \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(j+1)^p \pi^p}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi^p} \lim_{n \to +\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(j+1)^p} \underbrace{\int_{j\pi}^{(j+1)\pi} |\sin x|\,dx}_{2}$$

$$= \frac{2}{\pi^p} \lim_{n \to +\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(j+1)^p} \qquad k = j+1$$

$$= \frac{2}{\pi^p} \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^p} \qquad \frac{1}{k^p} = \int_{k}^{k+1} \frac{1}{[x]^p}\,dx$$

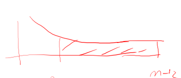
$$= \frac{2}{\pi^p} \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=2}^{n+1} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{[x]^p}\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi^p} \lim_{n \to +\infty} \int_{2}^{n+2} \frac{1}{[x]^p}\,dx = +\infty \qquad 0 < p \leq 1$$

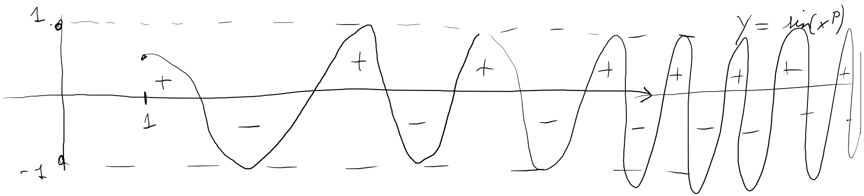
Confrontando gli estremi si ottiene

$+\infty > +\infty$, assurdo.

$$\int_{2}^{n+2} \frac{1}{x^p}\,dx$$



$\sin(x^p)$ con $p > 1$ è in $L[1, +\infty)$



$p > 1$

$$\int_1^R \sin(x^p)\, dx = \qquad y = x^p \qquad x = y^{\frac{1}{p}}$$

$$\frac{dy}{dx} = p\, x^{p-1}$$

$$= \frac{1}{p} \int_1^{R^p} \frac{\sin(y)}{y^{\frac{p-1}{p}}}\, dy$$

$$dy = p\, x^{p-1}\, dx$$

$$dx = \frac{1}{p} \frac{1}{x^{p-1}}\, dy =$$

$$= \frac{1}{p} \frac{1}{y^{\frac{p-1}{p}}}\, dy$$

dove $p > 1 \Rightarrow \frac{p-1}{p} > 0$ $\qquad q = \frac{p-1}{p} > 0$

$$\lim_{R \to +\infty} \int_1^R \sin(x^p)\, dx = \lim_{R \to +\infty} \frac{1}{p} \int_1^{R^p} \frac{\sin(y)}{y^q}\, dy \qquad S = R^p$$

$$= \frac{1}{p} \lim_{S \to +\infty} \int_1^S \frac{\sin(y)}{y^q}\, dy \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \exists$ finito $\int_1^{+\infty} \sin(x^p)\, dx$ se $p > 1$

Stabilire se $f(x)=\lg\left(1+\frac{1}{x}\right) th(x) \sin(x)$ è integrabile e se è assolutamente integrabile in $[1,+\infty)$.

$$f(x)= \lg\left(1+\frac{1}{x}\right)\sin x - \lg\left(1+\frac{1}{x}\right)(1-th x)\sin x$$

Qui si ricorda che $1-th(x)=o(x^{-n}) \quad \forall\, n\in\mathbb{R}$

$$1-th(x)= 1-\frac{sh(x)}{ch(x)} = 1-\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} = \frac{(\cancel{e^{x}}+e^{-x})-(\cancel{e^{x}}-e^{-x})}{e^{x}+e^{-x}}$$

$$= \frac{2e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} = \frac{2e^{-x}}{e^{x}(1+e^{-2x})} = 2e^{-2x}\frac{1}{1+e^{-2x}}$$

$$= 2e^{-2x}\frac{1}{1+o(1)} = 2e^{-2x}(1+o(1))$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{1-th(x)}{x^{-10}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{-2x}\cancel{(1+o(1))}}{x^{-10}}$$

$$= 2\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{10}}{e^{2x}} = 0$$

$$f(x)= \lg\left(1+\frac{1}{x}\right)\sin x + \lg\left(1+\frac{1}{x}\right)\sin x\; o(x^{-10})$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{\lg(1+y)}{y}=1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\lg\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=1$$

$$\lg\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x} \qquad \frac{\lg\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}(1+o(1))$$

$$f(x)= \boxed{\frac{\sin x}{x}(1+o(1)) \\ = \sin x\,\lg\left(1+\frac{1}{x}\right)} + \sin x\, x^{-1}(1+o(1))\,o(x^{-10}) + o(x^{-11})$$

$o(x^{-11})$ è assolutamente integrabile

$$|o(x^{-11})| = o(x^{-11})$$

La ragione è che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{o(x^{-11})}{x^{-11}}=0 \iff \lim_{x\to+\infty}\left|\frac{o(x^{-11})}{x^{-11}}\right|=0$$

$|o(x^{-11})|$ è integrabile per confronto asintotico

perché vale e $x^{-11}\in L[1,+\infty)$

$$f(x)= \sin(x)\lg\left(1+\frac{1}{x}\right) + o(x^{-11})$$

questo è ass. integrabile

$$\lg(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+o(y^2)$$

$$\lg\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o(x^{-2})$$

$$f(x)= \frac{\sin x}{x} + \frac{\sin x}{2x^2} + o(x^{-2})$$ — ass int in $[1,+\infty$

è ass int in $[1,+\infty)$

è integrabile ma non ass. int in $[1,+\infty)$