Calcoli mediante basi ortonormali

V spazio vettoriale Euclideo, $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ *base ortonormale*

$$\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij} \;\Rightarrow\; M_{\mathcal{B}}(\langle \ , \ \rangle) = I_n$$

$$v = x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n \;\rightsquigarrow\; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$w = y_1 b_1 + \cdots + y_n b_n \;\rightsquigarrow\; Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\langle v, w \rangle = {}^t XY = \langle X, Y \rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$\|v\| = \|X\|_{\mathbb{R}^n} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$x_i = \langle v, b_i \rangle \;\Rightarrow\; v = \sum_{i=1}^n \langle v, b_i \rangle b_i.$$

Pertanto le formule per il prodotto scalare e la norma rispetto ad una base ortonormale coincidono con le analoghe formule per $\mathbb{R}^n$ col prodotto scalare canonico. Le coordinate rispetto ad una base ortonormale sono i prodotti scalari con i vettori di base.

Prop. $\forall\, A \in M_n(\mathbb{R})$ *simmetrica definita positiva* $\Rightarrow \exists\, P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *t.c.* $A = {}^t PP$. *Quindi* $\det A > 0$.

Dim. $b_A \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ prodotto scalare $\Rightarrow \exists\, \mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ base ortonormale per $\mathbb{R}^n$ rispetto a $b_A \Rightarrow M_{\mathcal{B}}(b_A) = I_n$ congruente ad $A \rightsquigarrow P = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_n}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \rightsquigarrow A = {}^t P I_n P = {}^t PP \Rightarrow \det A = (\det P)^2 > 0$. $\square$

Esempio. Consideriamo il prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ indotto dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo già visto quest'esempio e sappiamo che A è definita positiva. La base canonica di $\mathbb{R}^2$ non è ortonormale. Usiamo Gram-Schmidt

$$\begin{aligned} u_1 &= e_1 \\ u_2 &= e_2 - \frac{\langle e_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\|u_1\| = \sqrt{2} \qquad\qquad b_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\|u_2\| = \sqrt{{}^t u_2 A u_2} = \sqrt{2} \qquad\qquad b_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

$\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ base ortonormale $\Rightarrow A = {}^tPP$ con $P = (b_1\ b_2)^{-1}$.

Completamento della base ortonormale. $\dim V = n$ *e* $u_1, \ldots, u_k \in V$ *vettori ortonormali* $\Rightarrow \exists\, u_{k+1}, \ldots, u_n \in V$ *t.c.* $(u_1, \ldots, u_n)$ *base ortonormale per* V*.*

Dim. Completiamo $u_1, \ldots, u_k$ ad una base per V aggiungendo certi vettori $v_{k+1}, \ldots, v_n$. Applicando Gram-Schmidt e normalizzazione a

$$u_1, \ldots, u_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$$

i primi k vettori non cambiano perché ortonormali tra loro $\rightsquigarrow u_1, \ldots, u_n$ base ortonormale per V. $\square$

Sottospazi vettoriali ortogonali. Due sottospazi vettoriali $U, W \subset V$ sono *ortogonali* se $\langle u, w\rangle = 0$, $\forall\, u \in U$ e $\forall\, w \in W$. Scriviamo $U \perp W$.

Oss. $U \perp W \Leftrightarrow$ ogni vettore di U è ortogonale ad ogni vettore di W.

Complemento ortogonale. $U \subset V$ sottospazio vettoriale

$$U^\perp \overset{\text{def}}{=} \{v \in V \mid \langle v, u\rangle = 0,\ \forall\, u \in U\}$$

Def. $U^\perp$ è detto *complemento ortogonale* o anche solo *ortogonale* di U.

Oss. $U \cap U^\perp = \{0_V\}$. Infatti $\forall\, v \in U \cap U^\perp \Rightarrow \langle v, v\rangle = 0 \Rightarrow v = 0_V$.

Teor. *$U^\perp \subset V$ è il più grande sottospazio vettoriale di V ortogonale a U.*

Dim. $0_V \in U^\perp$ dato che $\langle 0_V, u\rangle = 0$. $\forall\, v, w \in U^\perp$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall\, u \in U \Rightarrow$

$$\langle \alpha v + \beta w, u\rangle = \alpha\langle v, u\rangle + \beta\langle w, u\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \alpha v + \beta w \in U^\perp \qquad \square$$

Teor. *Se* $\dim V < \infty$ *allora* $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$*.*

Dim. $(u_1, \ldots, u_k)$ base ortonormale per $U \rightsquigarrow u_1, \ldots, u_n$ completamento ortonormale $\Rightarrow (u_{k+1}, \ldots, u_n)$ base per $U^\perp \Rightarrow \dim U^\perp = n - k$. $\square$

Cor. *Dato $U \subset V$ sottospazio vettoriale, $\forall\, v \in V \Rightarrow \exists!\, v_U \in U$, $v_{U^\perp} \in U^\perp$ t.c. $v = v_U + v_{U^\perp}$.*

Dim. $(u_1, \ldots, u_n)$ base ortonormale per V ottenuta come nella dimostrazione precedente: $U = \operatorname{span}(u_1, \ldots, u_k)$, $U^\perp = \operatorname{span}(u_{k+1}, \ldots, u_n) \rightsquigarrow$

$$v_U = \sum_{i=1}^{k} \langle v, u_i\rangle u_i, \qquad v_{U^\perp} = \sum_{i=k+1}^{n} \langle v, u_i\rangle u_i. \qquad \square$$

Oss. $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ base ortonormale per V, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ non tutti nulli

$$U\colon\ \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

$$\dim U = n - 1 \quad (\textit{iperpiano vettoriale})$$

$$v = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n \quad \text{base di } U^\perp$$

infatti l'equazione di U è il prodotto scalare tra il vettore di coordinate $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e il vettore di coordinate $(x_1, \dots, x_n)$.

Più in generale i vettori riga della matrice di un sistema lineare omogeneo generano l'ortogonale dello spazio delle soluzioni (e ne sono base se in numero uguale al rango della matrice).