SPAZIO DELLE CONFIG. per teorie di gauge non-abeliane

Consideriamo una teoria di YM. Usiamo la gauge $A_0^a = 0$ (gauge fixing)

- La teoria è descritta dalle "coord" $A_i^a(\bar{x})$ coord. in Q $\quad i = 1,2,3$
  $\bar{x}$ indice continuo $\quad \bar{x} \in \mathbb{R}^3$
  (t è il parametro delle traiettorie)

- Per semplicità consideriamo $G = SU(2)$.

- $A_i^a(\bar{x})$ sono ridondanti, a causa delle traf. di gauge residue:

$$A_i \mapsto U A_i U^{-1} + i\, \partial_i U\, U^{-1} \qquad U : \mathbb{R}^3 \to SU(2)$$
$$A_0 = 0 \mapsto A_0 = 0$$

- Spazi rilevanti per noi:

$$\mathcal{A} = \{ \text{gauge fields } A_i^a(\bar{x}) \}$$
$$\Omega_* = \{ \text{traf. } U : \mathbb{R}^2 \to SU(2) \text{ t.c. } U(\bar{x}) \to \mathbb{1} \text{ per } |\bar{x}| \to \infty \}$$

- Lo sp. delle config. è $\quad Q = \mathcal{A} / \Omega_*$

$\mathcal{A}$ è uno spazio AFFINE:

Dati $A_i^{(1)}, A_i^{(2)} \in \mathcal{A}$ gli due pti sono connessi dal cammino

$$A_i(\bar{x};\tau) \equiv A_i^{(1)}(\bar{x})\,(1-\tau) + A_i^{(2)}(\bar{x})\,\tau \quad \in \mathcal{A} \qquad \tau \in [0,1]$$

$\to$ $\mathcal{A}$ ha le proprietà di uno SPAZIO EUCLIDEO a dim ∞, che è topologicamente triviale; in particolare $\pi^1(\mathcal{A}) = 0$.

$\Omega_\star$) $G = SU(2)$. Parametrizziamo $SU(2)$ nel seguente modo

$$U = \phi_0 \mathbb{1}_2 + i\phi_i\sigma_i \quad \text{con} \quad \phi_0, \phi_i \in \mathbb{R}$$

$$\text{e} \quad \phi_0^2 + \sum_i \phi_i^2 = 1$$

questo implica che $U^\dagger = U^{-1}$ e $\det U = 1$

$\rightarrow SU(2)$ è TOPOLOGICAM. UNA SFERA S^3

Consideriamo ora una TRASFORMAZ. DI GAUGE $U(x) = \phi_0(x) + i\phi_i(x)\sigma_i$

- In particolare, $\phi_\mu(x)$ ($\mu = 0,1,2,3$) sono mappe : $\mathbb{R}^3 \rightarrow S^3$

- Inoltre se $U(x) \in \Omega_\star$, $U(x) \xrightarrow[\vec{x}\to\infty]{} \mathbb{1}$

$\Rightarrow$ possiamo identificare i pti all'infinito :

$U(x)$ si comporta come una funzione : $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \rightarrow S^3$

$\rightsquigarrow \quad U : S^3 \longrightarrow S^3 \quad$ se $\quad U \in \Omega_\star$

Esplicitam.: $\quad y_0 \equiv \dfrac{x^2-1}{x^2+1} \qquad y_i \equiv \dfrac{2x_i}{x^2+1} \qquad y_0^2 + \sum_i y_i^2 = 1$

- diversi x_i danno diversi y_i
- $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ corrisponde a $y_0 = 1 \quad y_i = 0$

$$U \rightarrow \mathbb{1} \quad \text{in} \quad y \rightarrow (1,0,0,0)$$

Le mappe da S^3 a S^3 ricadono in CLASSI di OMOTOPIA appartenenti al gruppo $\pi^3(S^3) \simeq \mathbb{Z}$.

Qte mappe sono caratterizzate da un WINDING NUMBER w.

Esso dice quante volte S^3_x è arrotolata su S^3 di arrivo.

Es. $\pi^1(S^1)$ $\quad \varphi : S^1_\theta \longrightarrow S^1$

Volume dell'immagine è calcolato da un integrale su S^1_θ usando il PULL-BACK della forma di volume:

$$\text{vol Im} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{d\theta} d\theta \quad \rightarrow \quad w = \frac{\text{vol Im} S^1_\theta}{\text{vol } S^1_\theta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{d\theta} d\theta$$

Es. $\varphi(\theta) = n\theta \quad \rightarrow \quad w = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} n \, d\theta = n$.

Torniamo a $\pi^3(S^3)$.

Consideriamo la mappa $\quad \phi_\mu : S^3 \longrightarrow S^3$

Il WINDING NUMBER è dato dal rapporto tra il volume dell'immagine diviso il volume di S^3 di arrivo (cioè $2\pi^2$).

$$W(\phi) = \frac{\text{volume misurato con immagine di } \phi}{\text{volume misurato con misura standard su } S^3}$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \underbrace{\int_{S^3_x} d\Omega^{(3)}}_{\text{pull-back di forma di volume}} = \frac{1}{\underbrace{12\pi^2}_{2\pi^2 \cdot 3!}} \int d^3x \, \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^{ijk} \phi^\mu \partial_i \phi^\nu \partial_j \phi^\alpha \partial_k \phi^\beta$$

$$W(U) = -\frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3_x} d^3x \, \text{Tr}\left[U^{-1}\partial_i U \, U^{-1} \partial_j U \, U^{-1} \partial_k U \right] \epsilon^{ijk}$$

$$= -\frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3_x} \text{Tr}\left[(U^{-1} dU)^3 \right]$$

W ha le seguenti proprietà:

1) W è INVARIANTE per deformazioni continue (invariante TOPOLOGICO) delle mappe $\phi_\mu(x) \longrightarrow$ W è COST. su una classe di omotopia

→ Consideriamo una deformaz. $\delta\phi^\mu$ t.c. $\delta\phi^\mu \xrightarrow[|\vec{x}|\to\infty]{} 0$ (per preservare $U \xrightarrow[|\vec{x}|\to\infty]{} \mathbb{1}$)

Siccome $\phi^\mu\phi^\mu = 1 \longrightarrow \underline{\phi^\mu \delta\phi^\mu = 0}$.

Allora:

$$\delta W = W(\phi+\delta\phi) - W(\phi) = \frac{1}{12\pi^2}\int d^3x\, \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\big(\delta\phi^\mu \overbrace{d\phi^\nu \wedge d\phi^\alpha \wedge d\phi^\beta}^{\sim\, \partial_i\phi^\nu \partial_j\phi^\alpha \partial_k\phi^\beta \epsilon^{ijk} d^3x} +$$

$$+ \underbrace{\phi^\mu d\delta\phi^\nu \wedge d\phi^\alpha \wedge d\phi^\beta + \phi^\mu d\phi^\nu \wedge d\delta\phi^\alpha \wedge d\phi^\beta + \phi^\mu d\phi^\nu \wedge d\phi^\alpha \wedge d\delta\phi^\beta}_{}$$

tutti qti termini sono uguali al primo, come si vede integrando per parti e rinominando indici e tenendo conto che $d^2=0$ e $\delta\phi \to 0$ al bordo.

$$= \frac{1}{3\pi^2}\int d^3x\, \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, \delta\phi^\mu d\phi^\nu \wedge d\phi^\alpha \wedge d\phi^\beta$$

Ricordiamo $\delta\phi^\mu\phi^\mu = 0 \implies \delta\phi^\mu = \epsilon^{\mu\rho\sigma\lambda}\omega_{\rho\sigma}\phi_\lambda$

con $\omega_{\rho\sigma}$ tensore antisimmetrico

(È come dire in 3d che se $\delta\bar{v} \perp \bar{v}$, allora $\delta\bar{v} = \bar{w} \times \bar{v}$ per qualche $\bar{w}$.)

↓

$$\delta W = \frac{1}{3\pi^2}\int d^3x\, \big(\underbrace{\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon^{\mu\rho\sigma\lambda}}_{\text{somme di prodotti di } \delta\text{-symbols } \delta^{\rho\sigma\lambda}_{\nu\alpha\beta}}\big)\, \omega_{\rho\sigma}\, \underbrace{\phi_\lambda\, d\phi^\nu \wedge d\phi^\alpha \wedge d\phi^\beta}_{} = 0$$

$$\phi_\lambda d\phi^\lambda = d(\overset{1}{\overset{\shortparallel}{\phi_\lambda\phi^\lambda}}) = 0$$

2) $W[U_1 U_2] = W[U_1] + W[U_2]$ $\leftarrow \pi_3(S^3)$ è isomorfo a $(\mathbb{Z},+)$ come gruppo.

$$W[U] = -\frac{1}{24\pi^2}\int_{S^3_x} tr\left[(U^{-1}dU)^3\right]$$

$$(U_1U_2)^{-1}d(U_1U_2) = U_2^{-1}(U_1^{-1}dU_1)U_2 + U_2^{-1}\cancel{U_1^{-1}}\cancel{U_1}\,dU_2$$

$$\equiv U_2^{-1}(A+B)U_2 \qquad \left.\begin{array}{l} A \equiv U_1^{-1}dU_1 \\ B \equiv dU_2\,U_2^{-1}\end{array}\right\} \text{1-forme}$$

$$W[U_1U_2] = -\frac{1}{24\pi^2}\int Tr\left[(A+B)(A+B)(A+B)\right] =$$

$$= -\frac{1}{24\pi^2}\int\left(Tr A^3 + Tr B^3 + 3Tr(A^2B) + 3Tr(AB^2)\right)$$

$$= W[U_1] + W[U_2] - \frac{1}{8\pi^2}\int Tr(-dAB + AdB)$$

$$A^2 = -dA \leftarrow dA = d(U_1^{-1}dU_1) = dU_1^{-1}dU_1 = -U_1^{-1}dU_1U_1^{-1}dU_1$$

$$\underbrace{d(U_1^{-1}U_1)}_{} = 0 \qquad = dU_1^{-1}U_1 + U_1^{-1}dU_1 \Rightarrow dU_1^{-1} = -U_1^{-1}dU_1U_1^{-1}$$

$$B^2 = dB$$

$$= W[U_1] + W[U_2] + \frac{1}{8\pi^2}\int_{S^3_x} dTr(AB)$$

$\parallel$ perché S^3_x non ha bordo

0

//

- Consideriamo $U_0(x) = \mathbb{1}$ e $U_1(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} + i\,\frac{2x_i\,\sigma^i}{x^2+1}$ $\leftarrow$ vedi param. S^3 con y_μ

$\downarrow$ $W=0$ $\qquad$ $\downarrow$ $W=1$

$\Rightarrow$ U_1 non può essere deformato in maniera continua a U_0

Con la mappa U_1 possiamo trovare rappresentanti di tutte le altre classi: $W[U_1\cdot U_1] = 2$ $\quad W[U_1^+] = -1$

$(0 = W[U_1^+U_1] = W[U_1^+] + W[U_1])$

• Ω_* è l'UNIONE DISGIUNTA di componenti disconnesse labellate dal winding number $w \in \mathbb{Z}$:

$$\Omega_* = \bigcup_{w=-\infty}^{+\infty} [w] \qquad \pi^0(\Omega_*) = \mathbb{Z}$$

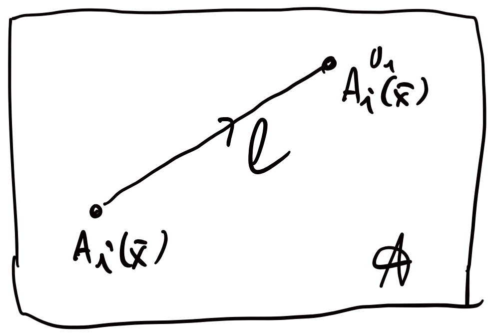
↑ mappe nella classe labellata da w.

$Q = \mathcal{A}/\Omega_*$

Consideriamo una linea in $\mathcal{A}$ data da

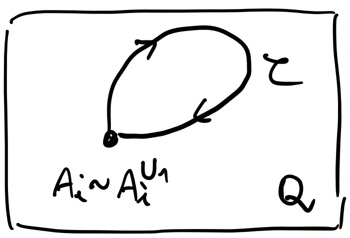
$$A_i(\bar{x},\tau) = A_i(\bar{x})(1-\tau) + A_i^{U_1}(\bar{x})\tau \qquad \tau \in [0,1] \qquad (*)$$

(U_1 è la mappa con $w=1$)



Nel quoziente, la linea l in $\mathcal{A}$ diventa un loop, perché

$$A_i(\bar{x}) \sim A_i^{U_1}(\bar{x})$$



$\tilde{A}(\tau) = A_{(0)}^{U(\tau)}$ $\quad U : [0,1] \to \Omega_*$

t.c. $U(0) = \mathbb{1}$

$U(1) = U_1$

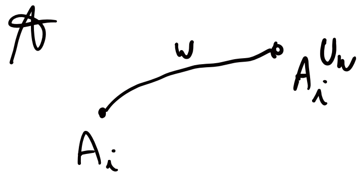
qto vuol dire c'è omotopia tra $\mathbb{1}$ e U_1

$\mathcal{C}$ è CONTRAIBILE in Q ?

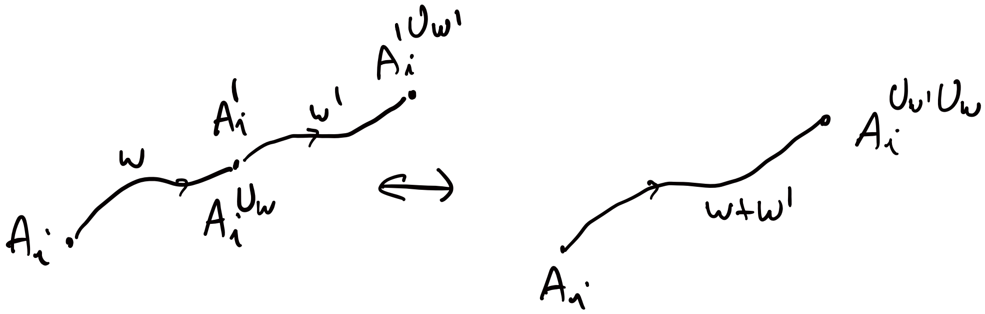
Lo sarebbe se l fosse deformabile a un pezzo di orbita. Ma questo sarebbe possibile solo se $U_1(x)$ fosse deformabile in maniera continua alla mappa $\mathbb{1}$. Questo <u>non</u> è possibile perché U_1 e $\mathbb{1}$ appartengono a due classi di omotopia distinte

$\Rightarrow \exists\, \mathcal{C}$ NON CONTRAIBILE $\Rightarrow$ $\pi^1(Q) \neq 0$

Possiamo ripetere lo stesso ragionamento sostituendo U_1 con U_w con $w \neq 0$ generico



Questi cammini sono labellati da $w \in \mathbb{Z}$ e cammini con w diverso non possono essere deformati l'uno nell'altro.

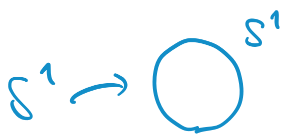


Abbiamo isomorfismo di gruppo con $\mathbb{Z}$:

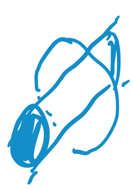
$$\pi^1(Q) \cong \mathbb{Z}$$

[Finora $G = SU(2) \cong S^3$. Per un generico gruppo di Lie, esso ha un sottogruppo $SU(2) \Rightarrow$ anche le mappe da S^3_x a G sono classificate da $\pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$.

Es. con π_1 :



pendolo



AB effect]

INTEGRALE DI CAMMINO e Θ - TERMINE

Q è uno sp. topologicam. non-triviale $(\pi^1(Q) = \mathbb{Z})$

$$\int \mathcal{D}A \; e^{iS[A]} = \sum_w \chi(w) \int \mathcal{D}_w A \; e^{iS[A]} \qquad (\ast)$$

{cammini in $Q = \mathcal{A}/\mathcal{G}_\infty$}

CARATTERE di $\pi^1(Q) = \mathbb{Z} \Rightarrow \chi(w) = e^{iw\theta}$

I campi $A(\bar{x}, t)$ possono essere visti sia come funz. da $\mathbb{R}^4$, oppure come cammini (parametrizzati da t) su Q.

$\Rightarrow$ diverse teorie quantistiche associate alla stessa teoria classica, che sono parametrizzate da $\theta \in [0, 2\pi[$

- w che compare in $\chi(w)$ è il WINDING NUMBER
- $(\ast)$ può essere riscritta come $\int \mathcal{D}A \; e^{iS + iS_T}$.

  In questo caso il termine topologico è

$$S_T = \frac{\theta}{64\pi^2} \int d^4x \; \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F^a_{\mu\nu} F^a_{\rho\sigma} = \theta \, c_2$$

  che già sappiamo essere l'integrale di una derivata totale.

- $\int \mathcal{D}_w A \; e^{-S_E(A)}$ è approssimato semiclassicam. da una soluz. delle eq. del moto Euclidee, cioè da ISTANTONI.

[Nota: $d^4x \, \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \sim dx^0 d^3x \, \epsilon^{0ijk} F_{0i} F_{jk} = d^4x_E \, F_{4i} F_{jk} \epsilon^{ijk} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow e^{iS + iS_T} \rightsquigarrow e^{-S_E + iS_T}$]

- $$e^{iS_T[A_w]} = \chi(w) = e^{iw\theta}$$

$$w = -\frac{1}{24\pi^2}\int \mathrm{Tr}\left[(U^{-1}dU)^3\right] = \int d^3\bar{x}\,\left(K^0(A^U(\bar{x})) - K^0(A(\bar{x}))\right) =$$

$$= \int d^4x\ \partial_\mu K^\mu(A(x)) = -\frac{1}{32\pi^2}\int d^4x\, \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathrm{Tr}\,(F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta})$$

$$K^\mu = -\frac{1}{8\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathrm{Tr}\left(A_\nu\partial_\alpha A_\beta + \frac{2}{3}A_\nu A_\alpha A_\beta\right)$$

(Nair pag. 365)

- Esempio di loop non contraibile

$$A_i(\bar{x}, x_4) = A_i(\bar{x})\,\frac{1}{1+e^{x_4}} + \frac{e^{x_4}}{1+e^{x_4}}\,A_i^{U_1}(\bar{x})$$

$$\to A_i \qquad x_4 \to -\infty$$

$$\to A_i^{U_1} \qquad x_4 \to +\infty$$

$w = 1$ per costruzione

Il contributo di tale cammino al P.I. è dato da

$$e^{-S[A_i] + i\theta}$$

C'è un'infinità di cammini con $w = 1$ e tutti contribuiscono a $e^{i\theta}\int DA_{w=1}\, e^{-S_E[A]}$.

- Il contributo dominante è dato dai cammini che minimizzano l'azione Euclidea. Tali cammini avranno le seguenti proprietà:
  1) sol. delle eq. del moto Euclidee. ($\delta S_E = 0$)
  2) $S_E[A_{sol}] < \infty$

3) appartengono a una data classe d'omotopia (winding number)

4) $A_i(\bar{x}, x_4) \to 0$ per $x_4 \to -\infty$ e $A_i(\bar{x}, x_4) \to i U_w^{-1} \partial_i U_w$ per $x_4 \to +\infty$

(scelgo come pto base per i loop $A_i = 0$)$^{(*)}$

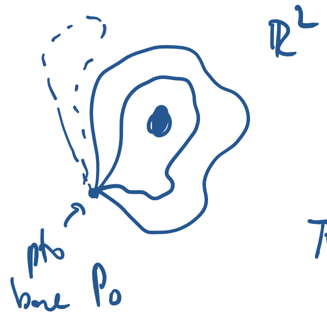
5) $A_0 \equiv A_4 = 0$ (nostra scelta di gauge fissata)

1,2,3

$$D_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad , \quad w(A) = n \in \mathbb{Z} \quad , \quad S_E(A) < \infty$$

Le config. che soddisfano queste prop. sono dette ISTANTONI !

(*)



$$\pi^1_{P_0}(Q) \cong \pi^1_{P_0'}(Q) \equiv \pi^1(Q)$$