ESERCIZI DI IAG - FOGLIO 4

(1) Sia C la curva proiettiva di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ di equazione

$$F(x_0,x_1,x_2) = x_0x_2^2 - x_1^3 + x_0x_1^2 + 5x_0^2x_1 - 5x_0^3 = 0$$

e sia $Q = (0:1:0)$. Si verifichi che C è non singolare e si determinino i punti $P \in C$ tali che la tangente a C in P passi per il punto Q.

(2) Si consideri la curva C di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ di equazione

$$f(x,y) = x - xy^2 + 1 = 0.$$

(a) Si determinino i punti singolari e gli asintoti di C.
(b) Si determinino i punti di flesso della chiusura proiettiva di C, verificando che sono allineati, e si calcoli l'equazione di una retta che li contiene.

(3) Al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{C}$, si consideri la curva affine $C_{a,b}$ di equazione

$$f(x,y) = x^3 - 2ay^2 + bxy^2 = 0.$$

(a) Si determinino i valoridi a, b per cui la retta all'infinito e è tangente alla chiusura proiettiva $\bar{C}_{a,b}$ di $C_{a,b}$ e per ciascuno di tali valori si dica se $C_{a,b}$ è singolare nel punto di tangenza.
(b) Si determinino, se esistono, $a, b \in \mathbb{C}$ tali che $C_{a,b}$ passi per il punto $(1,2)$ con tangente $x - y + 1 = 0$.

(4) Sia C una quartica irriducibile di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ avente 3 cuspidi. Si dimostri che le tre tangenti principali a C nei punti cuspidali appartengono a un fascio di rette.

(5) **Fascio di cubiche di Hesse**.
Si consideri il fascio

$$\mathcal{F} := \{\mathcal{C}_{\lambda,\mu} \mid (\lambda:\mu) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}\},$$

dove $\mathcal{C}_{\lambda,\mu} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ è la cubica di equazione

$$F_{\lambda\mu}(x_0,x_1,x_2) = \lambda(x_0^3 + x_1^3 + x_2^3) + \mu x_0x_1x_2 = 0.$$

(a) Si trovino i punti base di $\mathcal{F}$ e si verifichi che ciascuno di essi è non singolare per ogni $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$.
(b) Si mostri che per ogni $(\lambda:\mu) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, la curva Hessiana $H(\mathcal{C}_{\lambda,\mu})$ di $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$ è definita ed appartiene al fascio $\mathcal{F}$.
(c) Si consideri l'applicazione

$$H : \mathcal{F} \to \mathcal{F}, \qquad \mathcal{C}_{\lambda,\mu} \to H(\mathcal{C}_{\lambda,\mu}).$$

Si dimostri che H ha quattro punti fissi e che non è una proiettività.
(d) Si determinino i flessi di $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$, quando $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$ non è un punto fisso per H.