

Matrici ortogonali

Def. Una matrice $P \in M_n(\mathbb{R})$ è *ortogonale* se ${}^tPP = I_n$

Oss. $P \in M_n(\mathbb{R})$ ortogonale $\Leftrightarrow P^{-1} = {}^tP$

Oss. P ortogonale $\Rightarrow \det P = \pm 1$. Infatti $1 = \det({}^tPP) = (\det P)^2$.

Def. $O(n) \stackrel{\text{def}}{=} \{P \in M_n(\mathbb{R}) \mid P \text{ ortogonale}\}$ *gruppo ortogonale*.

Def. $SO(n) \stackrel{\text{def}}{=} \{P \in O(n) \mid \det P = 1\}$ *gruppo ortogonale speciale*.

Oss. $I_n \in SO(n)$.

Oss. $SO(n) \subset O(n) \subset GL_n(\mathbb{R})$.

Oss. Prodotti e inverse di matrici ortogonali (speciali) sono ortogonali (speciali).

Prop. Le seguenti sono equivalenti

(1) le colonne di P sono base ortonormale per $\mathbb{R}^n$;

(2) le righe di P sono base ortonormale per $\mathbb{R}^n$;

(3) P è ortogonale.

Dim. Dimostriamolo per le colonne.

$({}^tPP)_{ij} = ({}^tP)^{(i)} P_{(j)} = \langle P_{(i)}, P_{(j)} \rangle = \delta_{ij} \Leftrightarrow P$ ortogonale. $\square$

Oss. $P \in O(n)$ rappresenta un cambio di base dalla base canonica ad un'altra base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

Più in generale vale il teorema seguente, con V spazio vettoriale Euclideo.

Teor. Siano $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ e $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ basi per V con $\mathcal{B}$ ortonormale. Allora $\mathcal{C}$ è ortonormale $\Leftrightarrow M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{id}_V) \in O(n)$.

Endomorfismi autoaggiunti

Def. $f \in \text{End}(V)$ è *autoaggiunto* o *simmetrico* se $\forall v, w \in V$ si ha

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle.$$

Teor. Sia $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ base ortonormale per V .

$f \in \text{End}(V)$ autoaggiunto $\Leftrightarrow M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ matrice simmetrica.

Dim. $A := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$. $\forall v = X^{\mathcal{B}}, w = Y^{\mathcal{B}} \in V, X, Y \in \mathbb{R}^n$

$$\langle f(v), w \rangle = \langle AX, Y \rangle_{\mathbb{R}^n} = {}^t(AX)Y = {}^tX {}^tAY$$

$$\langle v, f(w) \rangle = \langle X, AY \rangle_{\mathbb{R}^n} = {}^tXAY$$

quindi $\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle \Leftrightarrow {}^tX {}^tAY = {}^tXAY \Leftrightarrow {}^tA = A$. $\square$

Cor. Data $A \in M_n(\mathbb{R})$, $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ autoaggiunto rispetto al prodotto scalare canonico $\Leftrightarrow {}^tA = A$.

Dim. $\mathcal{E}_n = (e_1, \dots, e_n)$ ortonormale e $M_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{E}_n}(L_A) = A$. □

Esempio. Consideriamo $\mathbb{R}^2$ col prodotto scalare canonico.

$L_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

autoaggiunto perché A simmetrica.

$L_B: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

non è autoaggiunto.

Prop. $f \in \text{End}(V)$ autoaggiunto, $\lambda \neq \mu$ autovalori di $f \Rightarrow \text{Aut}(\lambda) \perp \text{Aut}(\mu)$.

Dim. v autovettore relativo a λ e w autovettore relativo a μ . Dobbiamo dimostrare che $v \perp w$

$$\begin{aligned} \lambda \langle v, w \rangle &= \langle \lambda v, w \rangle = \langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle = \mu \langle v, w \rangle \\ (\lambda - \mu) \langle v, w \rangle &= 0 \Rightarrow \langle v, w \rangle = 0. \end{aligned}$$
□

Oss. Per il Teorema Fondamentale dell'Algebra, ogni $A \in M_n(\mathbb{C})$ ammette n autovalori contati con la loro molteplicità algebrica.

Lem. Ogni matrice simmetrica reale ha tutti gli autovalori reali.

Cor. Ogni $f \in \text{End}(V)$ autoaggiunto ammette autovalori.

Teorema spettrale. Supponiamo $\dim V < \infty$. Ogni $f \in \text{End}(V)$ autoaggiunto ammette una base ortonormale diagonalizzante.

Dim. Per induzione su $n = \dim V$.

Base dell'induzione: $n = 1$ $v \in V - \{0_V\} \rightsquigarrow u = \frac{v}{\|v\|}$ base ortonormale diagonalizzante.

Ipotesi induttiva Supponiamo vero l'enunciato in dimensione $n - 1 \geq 1$ e dimostriamolo in dimensione n .

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ autovalore di $f \rightsquigarrow v \in V - \{0_V\}$ autovettore $\rightsquigarrow U := \text{span}(v)^\perp$ complemento ortogonale di $\text{span}(v) \Rightarrow \dim U = n - 1$.

$\forall u \in U \Rightarrow \langle f(u), v \rangle = \langle u, f(v) \rangle = \lambda \langle u, v \rangle = 0 \Rightarrow f(u) \in U$.

Ipotesi induttiva $\rightsquigarrow (u_1, \dots, u_{n-1})$ base ortonormale per U diagonalizzante la restrizione $f|_U: U \rightarrow U$. Posto $u_n = \frac{v}{\|v\|} \Rightarrow (u_1, \dots, u_n)$ base ortonormale diagonalizzante $f: V \rightarrow V$. □

In pratica si procede nel modo seguente: si sceglie una base ortonormale $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ per V . Si calcola la matrice simmetrica reale $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ e si procede con la diagonalizzazione, calcolando gli autovalori e una base di autovettori. Si ottiene una base ortogonale diagonalizzante e poi si normalizza per ottenerne una ortonormale.

Cor. $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica $\Rightarrow \exists P \in O(n)$ t.c. $D = {}^t P A P$ diagonale.

Dim. $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ autoaggiunto $\Rightarrow \exists \mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$ base ortonormale diagonalizzante $\rightsquigarrow P = M_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}}(\text{id}_{\mathbb{R}^n}) = (u_1, \dots, u_n) \in O(n)$.

Si ha $D = P^{-1} A P$ diagonale e $P^{-1} = {}^t P$. □

Oss. A meno di cambiare segno a u_1 possiamo assumere $P \in SO(n)$.