Geometria 3 – Topologia

Foglio di esercizi 11

Giustificare adeguatamente le risposte.

1) Sia $A \subset R^n$ un sottoinsieme finito, $n \geq 3$. Dimostrare che $R^n - A$ è semplicemente connesso.

2) Quante e quali sono le componenti connesse per archi di $R^n - S^{n-1}$? E quelle di $R^n - B^n$?

3) Dimostrare che la composizione di due equivalenze omotopiche è un'equivalenza omotopica.

4) Dimostrare che uno spazio X è contraibile se e solo se qualunque applicazione continua $f : X \to Y$ verso uno spazio arbitrario Y è omotopa a costante.

5) Dimostrare che uno spazio X è contraibile se e solo se qualunque applicazione continua $f : Y \to X$ da uno spazio arbitrario Y è omotopa a costante.

6) La retta di Sorgenfrey è contraibile?

7) Sia $L \subset R^3$ una retta. Mostrare che $R^3 - L$ è connesso per archi e calcolare $\pi_1(R^3 - L)$.

8) Sia $K \subset R^2$ compatto e non vuoto. Consideriamo la componente connessa per archi illimitata U di $R^2 - K$. Dimostrare che esiste un epimorfismo $\pi_1(U) \to \mathbb{Z}$.

9) Sia $\Gamma \subset RP^2$ una conica non degenere (e non vuota) e sia $L \subset RP^2$ una retta proiettiva. Dimostrare che $\Gamma \cong L$ ma non esiste nessun omeomorfismo $f : RP^2 \to RP^2$ tale che $f(\Gamma) = L$.

10) Siano X e Y spazi topologici. Dimostrare che Y contraibile $\Rightarrow X \times Y \simeq X$.

11) Siano $r, s \subset C^2$ rette complesse distinte incidenti. Dimostrare che $C^2 - (r \cup s) \simeq T^2$.