Tutorato Analisi 1 M-Z
Esercitazione 10 - 18/12/2023

Clemente Romano

18 dicembre 2023

1. All in one
   Calcolare i seguenti integrali
   i) 07/02/2023
   $$\int_0^{\pi} x^2 \cos(2x)dx$$
   ii) 21/2/2023
   $$\int_0^{\pi} \sin^2(x)\cos(\sin(x))\cos(x)dx$$
   iii) 21/2/2023
   $$\int_1^4 (|x-2|-1)e^x dx$$
   iv)
   $$\int_{-\pi}^{\pi} xe^{x^2+x^4}dx$$
2. Calcolare i seguenti limiti
   i)
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x e^{-t^2}dt - \arctan(x)}{\sin(x)(1-\cos(x^2))}$$
   ii) 07/02/2023
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\int_{4x^2}^{9x^2} (1+2\cos(\sqrt{t}))dt}{\sin(x^2)}$$
   $$\lim_{x\to 0+} \frac{\int_{4x^2}^{9x^2} (1+2\cos(\sqrt{t}))dt}{\sin(\sqrt{x})^2(\ln(1+x))}$$
3. 28/01/2021 Sia $f\ :\ \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che
   $$\lim_{x\to +\infty} f'(x) = -\infty$$
   Dimostrare che
   i)
   $$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$$
   ii) non esiste alcun asintoto a $+\infty$
   iii) se f è derivabile due volte, allora
   $$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt = -\infty$$
4. 24/1/2023 Si studi la funzione
   $$f(x) = \frac{9-x^2}{7x+3}$$
   determinando
   i) dominio
   ii) Limiti importanti:
   iii) Eventuali asintoti:

iv) Derivata prima $f'(x)$ e suo segno
v) Intervalli di crescenza e decrescenza. Eventuali punti di massimo e minimo locali o globali.
vi) Derivata seconda $f''(x)$ e suo segno.
vii) Intervalli di convessità e concavità. Eventuali punti di flesso.
viii) Eventuali simmetrie.
ix) Grafico di f.

5. 07/02/2023 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte tale che

$$f(-2) = -4, \qquad f(-1) = -5, \qquad f(1) = 5, \qquad f(2) = 4$$

Dimostrare che:

i) la funzione non è né convessa né concava;
ii) la funzione derivata $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è tale che $[-1, 5] \subset f'(\mathbb{R})$;
iii) esiste almeno un punto in cui la derivata seconda si annulla:
iv) la funzione derivata seconda $f'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è tale che $[-2, 2] \subset f''(\mathbb{R})$

6. 21/2/2023 Si studi la funzione

$$f(x) = x - \arctan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{4}\ln(x^2 + 4)$$

determinando

i) dominio
ii) Limiti importanti:
iii) Eventuali asintoti:
iv) Derivata prima $f'(x)$ e suo segno
v) Intervalli di crescenza e decrescenza. Eventuali punti di massimo e minimo locali o globali.
vi) Derivata seconda $f''(x)$ e suo segno.
vii) Intervalli di convessità e concavità. Eventuali punti di flesso.
viii) Eventuali simmetrie.
ix) Grafico di f.

I prossimi sono esercizi bonus, quindi potrebbero risultare particolarmente difficili

Un metodo per calcolare gli integrali definiti consiste nel calcolare la primitiva e poi calcolare la differenza della primitiva agli estremi di integrazioni, tuttavia esistono dei metodi per calcolare gli integrali definiti senza dover calcolare la primitiva, e talvolta non è possibile esprimere la primitiva in termini di funzioni elementari (l'esempio tipico è la funzione e^{-x^2}), questi esercizi hanno lo scopo di approfondire alcuni di questi metodi.

7. Parte pari e parte dispari :

Un insieme $I \subset \mathbb{R}$ si dice simmetrico se e solo se per ogni $x \in I$ anche $-x \in I$.

Se I è un insieme simmetrico e $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione, allora si dice che : f è pari se $f(x) = f(-x)\ \ \forall x \in I$ f è dispari se $f(-x) = -f(x)\ \ \forall x \in I$.

Se $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione e $I \subset \mathbb{R}$ è un insieme simmetrico, mostrare le funzioni

$$\begin{cases} f_P(x) := \frac{f(x)+f(-x)}{2} \\ f_D(x) := \frac{f(x)-f(-x)}{2} \end{cases}$$

sono le uniche da I in $\mathbb{R}$ tali che

$$f(x) = f_P(x) + f_D(x)\ \ \forall x \in I$$

e f_P è una funzione pari e f_D è una funzione.

Email: clemente.romano@sissa.it

8. se I è un insieme simmetrico (ed è unione finita di intervalli limitati, in modo che gli integrali in questione siano ben definiti) e $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione integrabile e dispari, mostrare che

$$\int_I f(x)dx = 0$$

due casi particolari sono $I = [-a, a]$, in cui $\int_I f(x)dx = \int_{-a}^{a} f(x)dx$

$I = [a, b] \cup [-b, -a]$, in cui $\int_I f(x)dx = \int_{-b}^{-a} f(x)dx + \int_a^b f(x)dx$

$$\lim_{t \to +\infty} \int_{-t^2 f(-t)}^{t^2 f(t)} f(x)dx$$

9. se I è un insieme simmetrico (ed è unione finita di intervalli limitati, in modo che gli integrali in questione siano ben definiti) e $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione integrabile e pari, mostrare che

$$\int_I f(x)dx = 2\int_{I \cap [0,\infty[} f(x)dx$$

due casi particolari sono $I = [-a, a]$, in cui $\int_I f(x)dx = \int_{-a}^{a} f(x)dx$ e $\int_{I \cap [0,\infty[} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$

$I = [a, b] \cup [-b, -a]$, in cui $\int_I f(x)dx = \int_{-b}^{-a} f(x)dx + \int_a^b f(x)dx$ e $\int_{I \cap [0,\infty[} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

10. Dimostrare che se I è un insieme simmetrico (ed è unione finita di intervalli limitati, in modo che gli integrali in questione siano ben definiti) e $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione integrabile e pari, mostrare che

$$\int_I f(x)dx = \int_I f_P(x)dx = 2\int_{I \cap [0,\infty[} f_P(x)dx$$

11. Calcolare

$$\lim_{t \to +\infty} \int_{-t^2 f(-t)}^{t^2 f(t)} f(x)dx$$

dove f è la funzione dell'esercizio 5.

12. Un metodo per calcolare integrali definiti è quindi osservare che l'integrale di una funzione su un insieme simmetrico è uguale all'integrale della parte pari della funzione sullo stesso insieme, un altro consiste nel dare un nome all'integrale in questione (in generale si usa il simbolo I), e poi trovare un'equazione soddisfatta da I, in modo che l'integrale sia uguale alla soluzione dell'equazione. Un errore comune nell'usare questo metodo consiste nel non dimostrare l'esistenza dell'integrale.

Calcolare

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^e(x)}{\sin^e(x) + \cos^e(x)} dx$$

Hint : porre $I =$l'integrale, scrivere $I = I/2 + I/2$ e nel primo integrale usare il cambio di variabile $y = \pi/2 - x$.

Email: clemente.romano@sissa.it