Lezione 13 dicembre 2023

mercoledì 13 dicembre 2023 11:19

Visto: $f: V \to V$ diag $\iff \exists\, \mathcal{B}$ base di autovettori

$\iff M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = D$ diagonale

λ è autovalore di f se $f(v) = \lambda \cdot v$, per $v \neq 0_V$

$\iff \lambda$ è radice $p_f(x) = \det\left(M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) - x \cdot \mathbb{I}_n\right)$

con $\mathcal{C}$ base di V qualunque

Def.: Oss. che per il Teorema di Ruffini (su $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, anche su $\mathbb{K}$)

λ è radice di $p_f(x) \iff (x-\lambda)$ divide $p_f(x)$

$$p_f(x) = (x-\lambda) \cdot \underline{g(x)}$$

$$p_f(\lambda) = 0$$

Posso cons. $g(x)$, può succedere che $g(\lambda) = 0$

$\Rightarrow (x-\lambda)$ divide $g(x)$

$$(x-\lambda) \mid g(x)$$

$$g(x) = (x-\lambda) \cdot r(x)$$

$$p_f(x) = (x-\lambda)^2 \cdot r(x)$$

cont.

dopo # finito di passi (al più $n = \underbrace{\deg p_f(x)}_{\substack{\text{degree} = \\ \text{grado}}}$) $= \dim V$)

possiamo scrivere $p_f(x) = (x-\lambda)^m \cdot Q(x)$

con $Q(\lambda) \neq 0$

Questo m si chiama MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA dell'autovalore λ

$$m =: m_a(\lambda)$$

Quindi: $m_a(\lambda) := \max\left\{k \in \mathbb{N} : (x-\lambda)^k \underset{\substack{\downarrow \\ \text{divide}}}{\mid} p_f(x)\right\}$

Visto: abbiamo def $m_g(\lambda)$ MOLT. GEOM. di λ

$$m_g(\lambda) := \dim \mathrm{Aut}(\lambda) \geq 1$$

TEOREMA: Sia $f: V \to V$ endom.
Sia $\lambda \in Sp(f)$. Allora vale

$$\underset{\sim\sim\sim}{m_g(\lambda)} \leq \underset{\sim\sim\sim}{m_a(\lambda)}$$

Dim.: Poniamo $m_g(\lambda) = k$ e sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ una base di $Aut(\lambda)$.

Prolungo a base di V:

$$\{v_1, .., v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\} = \mathcal{C}$$

Si ha
$$f(v_1) = \lambda v_1 = \lambda \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n$$
$$f(v_2) = \lambda v_2 = 0 \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n$$
$$\vdots$$
$$f(v_k) = \lambda v_k = 0 \cdot v_1 + \cdot + 0 \cdot v_{k-1} + \lambda v_k + \cdot\, 0 \cdot v_n$$

Cons.
$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{array}{r} k\left\{\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\end{array}}\right. \\ \vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\end{array}} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \lambda & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \lambda & & \vdots & B \\ \vdots & 0 & \ddots & & \\ & & & \lambda & \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & A \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \end{array}\right)$$
$$\underbrace{\qquad\qquad}_{k \text{ colonne}}$$

$$= \begin{array}{r} \\ n-k\left\{\right. \end{array} \left(\begin{array}{c|c} \lambda \cdot I_k & B \\ \hline 0 & A \end{array}\right)$$

k

Calcolo $p_f(x) = \det\left(M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) - x \cdot I_n\right)$

$$= \det \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda - x & & 0 & \\ 0 & \lambda - x & & B \\ & & \ddots\ \lambda - x & \\ \hline & 0 & & A - x \cdot I_{n-k} \end{array}\right)$$

Usando formula di Laplace risp. prima colonna

$$= (\lambda - x) \cdot \det \begin{array}{r} k-1\left\{\right. \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{\boxed{\lambda - x} \quad 0}^{k-1} & & & B' \\ \vdots\ 0 & \ddots & \lambda - x & \\ \hline \vdots & 0 & & A - x I_{n-k} \end{array}\right)$$

$(n-1) \times (n-1)$

$k-2$

$$= (\lambda - x)\cdot(\lambda - x)\cdot \det \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix}\lambda - x & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda - x\end{matrix}}^{k-2} & B'' \\ \hline 0 & A - x I_{n-k}\end{array}\right)_{(n-2)\times(n-2)}$$

$\vdots$ k passi

$$= \underbrace{(\lambda - x)^k}\cdot \underbrace{\det(A - x\cdot I_{n-k})}_{\text{polinomio di grado } n-k} = (-1)^k\cdot(x-\lambda)^k\cdot\omega(x) = (-1)^{m_g(\lambda)}\cdot(x-\lambda)^{m_g(\lambda)}\cdot\omega(x)$$

Formula di Laplace

$$\det M = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\cdot \underbrace{m_{i1}}\cdot \det M_{i1}$$

se $m_{i1} = 0 \ \forall i \geq 2$

$$= (-1)^{1+1} m_{11}\cdot \det M_{11}$$

$$\Longrightarrow (x-\lambda)^{m_g(\lambda)} \text{ divide } p_f(x)$$

$$\Longrightarrow m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda).$$

OSS.: Si può dimostrare che in generale

se $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C\end{array}\right)$

$A \in M_k(\mathbb{K})$, $C \in M_{n-k}(\mathbb{K})$

(opp. $M = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline B & C\end{array}\right)$) matrice nulla

allora $\det M = \det A \cdot \det C$

Vedere note.

Ora vogliamo criteri per diagonalizz.

TEOREMA: $f: V \to V$ endomorfismo, $\dim V = n$. Allora le seguenti sono equivalenti:

① f è diagonalizzabile

② $p_f(x)$ si fattorizza nel prodotto di n fattori lineari (con event. ripetizioni) (cioè del tipo $(x-\lambda_i)$)

$$p_f(x) = (-1)^n\cdot(x-\lambda_1)\cdot(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)$$

e $\forall$ autovalore $\lambda_i \in Sp(f)$, vale

$$m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$$

③ se $S_p(f) = \{\mu_1, \dots, \mu_k\}$

$\mu_1, \dots, \mu_k$ autovalori distinti di f

allora $V = Aut(\mu_1) \oplus Aut(\mu_2) \oplus \cdots \oplus Aut(\mu_k)$

Cioè ① $\Longleftrightarrow$ ②

① $\Longleftrightarrow$ ③

② $\Longleftrightarrow$ ③

Dim: Dimostriamo ① $\Longrightarrow$ ②

② $\Longrightarrow$ ③

e ③ $\Longrightarrow$ ①

① $\rightarrow$ ②

Per ipotesi f diagonalizz.; quindi $\exists$

B base di autovettori

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$ con λ_i non nec. tutti distinti

$$p_f(x) = \det\left(M_B^B(f) - x \cdot \mathbb{I}_n\right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} \lambda_1 - x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - x & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n - x \end{pmatrix} = (\lambda_1 - x)\cdot(\lambda_2 - x)\cdot \cdots (\lambda_n - x)$$

$$= (-1)^n \cdot (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n)$$

$\rightarrow$ $p_f(x)$ è prodotto di n fattori lineari

Cons. $\forall \lambda_i$ calcolo $m_g(\lambda_i) = \dim Aut(\lambda_i)$

$$= \dim \ker(f - \lambda_i Id_V)$$

eq. per $Aut(\lambda_i)$: $\left(M_B^B(f) - \lambda_i \cdot \mathbb{I}_n\right) \cdot X = 0$

$$m_g(\lambda_i) = \dim Aut(\lambda_i) = n - rg\Big(\underbrace{M_B^B(f) - \lambda_i \mathbb{I}_n}\Big)$$

$\downarrow$

Teo. di dimensione

=

$$\begin{pmatrix} d_1-d_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d_2-d_i & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & d_i-d_i & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & d_n-d_i \end{pmatrix}$$

in questa matrice # colonne nulle = # di ripetizioni di d_i

tutte le altre colonne sono non nulle

e sono linearmente indipendenti

$$\dim \mathrm{Aut}(d_i) = n - (\#\{d_j \mid d_j \neq d_i\})$$

Inoltre: # di ripetizioni di d_i sulla diagonale $= m_e(d_i)$ per costruzione

$$= n - (n - m_e(d_i))$$

$$m_g(d_i) = \dim \mathrm{Aut}(d_i) = m_e(d_i)$$

② → ③

$$p_f(x) = (-1)^n \cdot (x-\mu_1)^{m_e(\mu_1)} \cdot (x-\mu_2)^{m_e(\mu_2)} \cdots (x-\mu_k)^{m_e(\mu_k)}$$

$$\mu_i \neq \mu_j \qquad i \neq j$$

e $m_e(\mu_i) = m_g(\mu_i) \quad \forall\ i=1,\dots,k$

$$= (-1)^n (x-\mu_1)^{m_g(\mu_1)} \cdot (x-\mu_2)^{m_g(\mu_2)} \cdots \cdot (x-\mu_k)^{m_g(\mu_k)}$$

$$\deg p_f(x) = n = m_g(\mu_1) + m_g(\mu_2) + \dots + m_g(\mu_k)$$

se verifico che la somma $\mathrm{Aut}(\mu_1) + \dots + \mathrm{Aut}(\mu_k)$ è diretta, per la formula di Grassmann

$$\dim\left(\mathrm{Aut}(\mu_1)+\dots+\mathrm{Aut}(\mu_k)\right)=m_g(\mu_1)+\dots+m_g(\mu_k)$$

$$=n$$

$$\Rightarrow \mathrm{Aut}(\mu_1)+\dots+\mathrm{Aut}(\mu_k)=V$$

FATTO: la somma è DIRETTA $\Longleftrightarrow$

(non lo dimostr. vedere note)

$\forall\, w\in\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Aut}(\mu_j)$ si scrive in modo UNICO nella forma

$$w=w_1+w_2+\dots+w_k$$

con $w_j\in\mathrm{Aut}(\mu_j)$

Sia $w\in\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Aut}(\mu_j)$

Supp. $w=w_1+w_2+\dots+w_k=w_1'+w_2'+\dots+w_k'$

$$\Rightarrow (w_1-w_1')+\underbrace{\overbrace{(w_2-w_2')}^{=u_2}}_{\in\mathrm{Aut}(\mu_2)}+\dots+\underbrace{\overbrace{(w_k-w_k')}^{u_k}}_{\in\mathrm{Aut}(\mu_k)}=0_V$$

$w_1,\ w_1'\in\mathrm{Aut}(\mu_1)$

$$\Rightarrow \underbrace{\overset{=u_1}{w_1-w_1'}}\in\mathrm{Aut}(\mu_1)$$

$$u_1+u_2+\dots+u_k=0_V$$

$$1\cdot u_1+1\cdot u_2+\dots+1\cdot u_k=0_V$$

comb. lin. a coeff. non tutti nulli

sappiamo che se $u_1,\dots,u_k$ sono autovettori ($\Rightarrow\neq 0_V$), sono LIN. INDIP.

$$\Longrightarrow u_1 = u_2 = \dots = u_k = 0_V$$

$$\Longrightarrow u_1 = w_1 - w_1' = 0_V \quad , \dots , \quad u_k = w_k - w_k' = 0_V$$

$$\Longrightarrow w_1 = w_1' \quad , \dots , \quad w_k = w_k' .$$

$$\Longrightarrow V = \mathrm{Aut}(\mu_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{Aut}(\mu_k).$$

③ $\Longrightarrow$ ①

Supp. $V = \mathrm{Aut}(\mu_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{Aut}(\mu_k)$

in particolare $\dim V = n = m_g(\mu_1) + \dots + m_g(\mu_k)$

Se $\mathcal{B}_j$ base di $\mathrm{Aut}(\mu_j)$

e cons. $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$: ho n vettori

sono linearmente indipendenti

(vale sempre quando i SSV sono in somma diretta)

$\Longrightarrow \mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$ è base

formata da autovettori

$\longrightarrow f$ è diagonalizzabile.