Lezione 14 dicembre 2023

giovedì 14 dicembre 2023 11:17

Teo: Sono equival. le seguenti:

① $f: V \to V$ è diagonalizz.

② $p_f(x) = (-1)^n \cdot (x-\lambda_1) \cdots \cdot (x-\lambda_n)$

e $\forall \lambda_i$, $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$

③ sia $Sp(f) = \{\mu_1, \dots, \mu_k\}$, si ha

$$\dim Aut(\mu_1) + \dim Aut(\mu_2) + \dots + \dim Aut(\mu_k) = n$$

ovvero $m_g(\mu_1) + \dots + m_g(\mu_k) = n$.

Dim: ①⇔② visto; ② ⇒ ③

Facile: ②: $m_a(\mu_i) = m_g(\mu_i)$ e

$$p_f(x) = (-1)^n (x-\mu_1)^{m_a(\mu_1)} \cdots \cdot (x-\mu_k)^{m_a(\mu_k)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{k} m_a(\mu_i) = n}_{\overset{\|}{m_g(\mu_i)}}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} m_g(\mu_i) = n$$

③ ⇒ ① Per ipotesi: $\sum_{i=1}^{k} m_g(\mu_i) = n = \dim V$

$\forall Aut(\mu_i)$, fisso base

$$\{w_1^i, \dots, w^i_{\underbrace{m_g(\mu_i)}_{=: m_i}}\}$$

Affermo che l'unione delle basi è un insieme di vettori LIN. INDIP. in V

infatti: cons.

$$\underbrace{c_1^1 w_1^1 + \dots + c_{m_1}^1 w_{m_1}^1}_{\in \mathrm{Aut}(\mu_1)} + \dots + \underbrace{c_1^k w_1^k + \dots + c_{m_k}^k \cdot w_{m_k}^k}_{\in \mathrm{Aut}(\mu_k)} = 0_V$$

$$= u_1 + \dots + u_k = 0_V$$

è una comb. lineare; se qualcuno di questi vettori u_j fosse non nullo, allora

$$u_j \in \mathrm{Aut}(\mu_j) \quad , \quad u_j \neq 0_V$$

$\Rightarrow u_j$ autovettore

$\Rightarrow$ otterrei una comb. lin. a coeff. non nulli di autovettori relativi a autovalori diversi $\Rightarrow$ impossibile per Teo: (autovettori relativi a autovalori diversi sono LIN. INDIP.)

$$\Rightarrow u_j = 0_V \qquad \forall\, j = 1, \dots, k$$

quindi $\quad u_1 = c_1^1 w_1^1 + \dots + c_{m_1}^1 w_{m_1}^1 = 0_V$

comb. lineare dei vettori della base di $\mathrm{Aut}(\mu_1)$

$$\Rightarrow c_1^1 = \dots = c_{m_1}^1 = 0$$

$$\vdots$$

$$u_k = c_1^k w_1^k + \dots + c_{m_k}^k w_{m_k}^k = 0_V$$

comb. lin. di vettori di base

$$\Rightarrow c_1^k = \dots = c_{m_k}^k = 0.$$

$\Rightarrow$ ho trovato $m_1 + m_2 + \dots + m_k$ vettori LIN. INDIP

per ipotesi $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$

$\Rightarrow$ formano una base

VENERDì 15/12 14-16 Ricevimento
in aula di H2 bis.

Esempi: Cons. $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

è diagonalizz.? $\left(\Leftrightarrow L_J : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \right.$ endo. diagonalizz.$\left. \right)$

$$p_J(x) = \det \begin{pmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ 1 & 2-x & 0 \\ 0 & 1 & 2-x \end{pmatrix} = (2-x)^3$$
$$= (-1)^3 \cdot (x-2)^{\textcircled{3}}$$

$\Rightarrow Sp(J) = \{2\}$

$m_a(2) = 3$

$Aut(2) = \ker(J - 2 \cdot I_3)$

$\dim Aut(2) = m_g(2) = 3 - rg(J - 2 \cdot I_3) = 3 - 2 = 1$

$$J - 2 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg(J - 2 I_3) = 2$

Quindi: $p_J(x)$ è prodotto di 3 fattori lineari

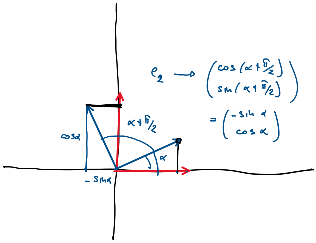
$S_p(J) = \{2\}$

però: $m_a(2) = 3$

$m_g(2) = 1 < 3$

$\Rightarrow$ J non è diagonalizz.

Esempio: Rotazioni piane :



$e_2 \to \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\alpha+\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$
$\alpha+\frac{\pi}{2}$
$\cos\alpha$
α
$-\sin\alpha$

rotaz. antioraria di angolo α attorno a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Geometricamente possiamo verificare che è AL.

$r: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\qquad \mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$

$$M = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(r) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ r(e_1) & r(e_2) \end{array}$$

$$p_M(x) = \det\begin{pmatrix} \cos\alpha - x & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - x \end{pmatrix}$$

$$= (\cos\alpha - x)^2 + \sin^2\alpha$$

$$= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\, x + x^2 + \sin^2\alpha$$

$$= x^2 - 2\cos\alpha \; x + 1$$

ha radici reali? $\Delta = 4\cos^2\alpha - 4$

$$= 4(\cos^2\alpha - 1)$$

$$= 4(-\sin^2\alpha) \geq 0$$

$-\sin^2\alpha \leq 0$

$$\iff -\sin^2\alpha = 0$$

$$\sin^2\alpha = 0 \iff \sin\alpha = 0$$

$\iff \alpha = 0 + 2k\pi$ opp. $\alpha = \pi + 2k\pi$

Nel caso complesso:

$$\Delta = -4\sin^2\alpha$$

$$\pm\sqrt{\Delta} = \pm 2 \cdot \sin\alpha \cdot \sqrt{-1}$$

$$x_{1,2} = \frac{2\cos\alpha \mp 2i\sin\alpha}{2}$$

$$= \cos\alpha \mp i\sin\alpha$$

Quindi: se $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \pi$,
$\alpha \in [0, 2\pi[$, NON CI SONO AUTOVALORI

& NEMMENO AUTOVETTORI

Supp.: $\alpha = 0$ $(\Delta = 0)$: $x^2 - 2x + 1 = 0$
$(x-1)^2 = 0$

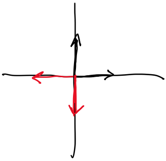
$$M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_2$$

r = identità, $Sp(M) = \{1\}$

$m_a(1) = 2 = m_g(1)$

$$\alpha = \pi : \quad M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{I}_2$$

$$M \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix}$$



$Sp(M) = \{-1\}$

$\forall v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$

$$r_\pi(v) = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix} = -v$$

$$= (-1)\cdot v$$

$\Rightarrow \forall v \in \mathbb{R}^2$ è autovettore relativo a $\lambda = -1$
$v \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$Aut(-1) = \mathbb{R}^2$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$ domani

OSS.: Ricordo le cond. ② del Teor. di diagonalizz.

- $p_f(x)$ si deve fattorizzare come prodotto di fattori lineari
- $\forall \lambda \in Sp(f) \quad m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$

Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, abbiamo

Teorema Fondamentale dell' Algebra:

Ogni polinomio $p(x) \in \underbrace{\mathbb{C}[x]}_{\text{spazio dei polinomi in 1 indeterminata}}$

a coeff. in $\mathbb{C}$

non costante ($\deg p(x) \geq 1$) ammette (almeno) una radice in $\mathbb{C}$.

$\exists\ \alpha_1 \in \mathbb{C} : p(\alpha_1) = 0$.

Quindi per Teo Ruffini: $(x-\alpha_1) \mid p(x)$

cioè $p(x) = (x-\alpha)\cdot p_2(x)$

$p_2(x) \in \mathbb{C}[x]$; se $\deg p_2(x) \geq 1$

Applico Teo Fond. Alg. a p_2:

$$p_2(x) = (x-\alpha_2)\cdot p_3(x)$$

$$p(x) = (x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdot p_3(x)$$

$$\vdots$$

$$p(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)\cdot a$$

$n = \deg p(x)$, $a \in \mathbb{C}$

PRODOTTI SCALARI REALI & COMPLESSI

Esempio: PS su $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

PS su $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$, $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

Voglio gen. questo prodotto a tutti V SV su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$.

Def: Sia V SV su $\mathbb{R} = \mathbb{K}$.

Un **PRODOTTO SCALARE** su V è:

una applicazione

$$b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

che verifica:

PS1 b è **BILINEARE**, cioè

b è lineare in ogni variabile:

$$b(\alpha v + \beta w, u) = \alpha \cdot b(v, u) + \beta\, b(w, u)$$

$$b(v, \alpha u + \beta y) = \alpha b(v, u) + \beta\, b(v, y)$$

PS2 b è **SIMMETRICA**

cioè: $\forall\, v, w \in V$, si ha

$$b(v, w) = b(w, v)$$

PS3 $b(v, v) \geq 0 \quad \forall\, v \in V$

e si ha $b(v,v)=0 \iff v=0_V$

si dice che b è app. bilineare

DEFINITA POSITIVA.

OSS. Il PRODOTTO SCALARE STANDARD su $\mathbb{R}^n$:

$$b\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}\right) := \sum_{i=1}^{n} a_i c_i \in \mathbb{R}$$

è un PS.

Def. Sia V SV su $\mathbb{C}$. Un **PROD. SCALARE su V** è una app.

$$b : V \times V \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{t.c.}$$

$PS1_{\mathbb{C}}$: b è **SESQUILINEARE**, cioè

è LINEARE nel secondo argomento,

e ANTILINEARE nel primo:

$$b(v, \alpha u + \beta w) = \alpha\, b(v,u) + \beta\, b(v,w)$$

$$b(\alpha v+\beta y, u) = \bar{\alpha}\, b(v,u) + \bar{\beta}\, b(y,u)$$

con $\bar{\alpha}$ = coniugato di α

$\boxed{PS2_{\mathbb{C}}}$ b è **HERMITIANA**

$$b(v,w) = \overline{b(w,v)} \in \mathbb{C}$$

coniugato complesso

$\forall\, v, w \in V$

$\boxed{PS3_{\mathbb{C}}}$ b è **DEFINITA POSITIVA:**

$\forall\, v \in V$, $\underline{b(v, v \geq 0}$

e $b(v,v)=0 \iff v=0_V$

ha senso per $\boxed{PS2_{\mathbb{C}}}$: $b(v,v) = \overline{b(v,v)}$

$$\Updownarrow$$

$$b(v,v) \in \mathbb{R}$$

$a+ic = a-ic \iff c=0$

$z = a+ic$, $a \in \mathbb{R}$ parte reale
$c \in \mathbb{R}$ parte im.

$\bar{z} := a-ic$