Lezione 15 dicembre 2023

venerdì 15 dicembre 2023 11:18

Oggi: 4C #2 bis (4° piano)
14-16 ; file

Visto: PS su V su $\mathbb{R}$
e su $\mathbb{C}$

Se $V=\mathbb{R}^n$, abbiamo PS standard

$$\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix} := \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

oss: in forma matriciale

$${}^t\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix} = \underbrace{\underset{1\times n}{(a_1 \cdots a_n)}\overset{\substack{\text{prodotto RC}\\ \downarrow}}{\cdot}\underset{n\times 1}{\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}}}_{1\times 1} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \in \mathbb{R}$$

Nel caso $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, visto PS
$b: V\times V \to \mathbb{C}$ t.c.

① sesquilineare
② hermitiana
③ definita positiva

Esempio: PRODOTTO SCALARE STANDARD

su $\mathbb{C}^n$:

$$\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix} := \sum_{i=1}^{n} \bar{z}_i\cdot w_i$$

in forma matriciale:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}}_{=z}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}}_{w} = (\bar{z}_1 \cdots \bar{z}_n)\cdot\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}$$

in forma compatta: ${}^t\bar{z}\cdot w$

Richiami sui complessi e coniugati:

se $z = a + ib \in \mathbb{C}$;

$\bar{z} := a - ib$

$a, b \in \mathbb{R}$, $a = \mathrm{Re}\, z$ PARTE REALE
$b = \mathrm{Im}\, z$ PARTE IMMAGINARIA

Proprietà:

- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
  $\overline{(\lambda z)} = \bar{\lambda} \cdot \bar{z}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$
- $z + \bar{z} = 2\, \mathrm{Re}\, z$
- $z - \bar{z} = 2i\, \mathrm{Im}\, z$
- $z \cdot \bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$
- $z \neq 0$, $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

Esercizio: prod. sc. standard su $\mathbb{C}^4$ è un PS.

RAPPR. MATRICIALE di PS

Def: Sia $b : V \times V \to K$, con $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ PS. Fissiamo base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V la MATRICE ASSOCIATA A b NELLA BASE $\mathcal{B}$ è

$$\underset{n \times n}{(M_{\mathcal{B}}(b))_{ij}} := \underset{\in K}{b(v_i, v_j)}$$

$$M_{\mathcal{B}}(b) = \begin{pmatrix} b(v_1,v_1) & b(v_1,v_2) & \cdots & b(v_1,v_n) \\ \vdots & & & \vdots \\ b(v_n,v_1) & b(v_n,v_2) & \cdots & b(v_n,v_n) \end{pmatrix}$$

Es: $V=\mathbb{R}^n$, $b = \cdot$ PS standard

$\mathcal{B} = \mathcal{E}$ = base canonica

$$M_{\mathcal{E}}(b) = \begin{pmatrix} e_1\cdot e_1 & e_1\cdot e_2 & \cdots & e_1\cdot e_n \\ e_2\cdot e_1 & & & \\ \vdots & & & \\ e_n\cdot e_1 & & & e_n\cdot e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & - & - 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_n$$

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad e_1\cdot e_1 = 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + \dots + 0\cdot 0$

$= 1$

$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad e_1 \cdot e_2 = (1\ 0 \cdots 0)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

in $\mathbb{C}^n$ PS standard, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$$M_{\mathcal{E}}(b) = \begin{pmatrix} e_1\cdot e_1 & e_1\cdot e_2 & \cdots & \\ & e_2\cdot e_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & e_n\cdot e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & - & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & - & - 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_n$$

Prop: V sv su $\mathbb{R}$, b (ovvero $\langle\cdot,\cdot\rangle$)

$b(v,w) = \langle v, w\rangle$

$\mathcal{B}$ base di V; $\forall\ v, w \in V$

indichiamo con x la colonna delle coordinate di v nella B, con y colonna delle coordinate di w in B; allora :

$$\langle v, w\rangle = \overbrace{\underbrace{{}^t x}_{1\times n} \cdot \underbrace{M_B(b)}_{n\times n} \cdot \underbrace{y}_{n\times 1}}^{1\times 1}$$

$$\underset{n\times 1}{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad \underset{n\times 1}{y} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n, \qquad w = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$$

Esempio: Se $V = \mathbb{R}^n$, $B = \mathcal{E}$, b = standard

$$M_{\mathcal{E}}(b) = \mathbb{I}_n; \qquad v \cdot w = {}^t x \cdot \mathbb{I}_n \cdot y \overset{!}{=} {}^t x \cdot y$$

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = x$$

OSS.: $M_B(b)$ è una MATRICE : ${}^t M_B(b) = M_B(b)$

SIMMETRICA per $\boxed{PS\,2}$: $b(v_i, v_j) = b(v_j, v_i)$

NEL CASO COMPLESSO:

$$b : V \times V \to \mathbb{C}, \qquad (M_B(b))_{ij} = b(v_i, v_j)$$

$\boxed{PS2_{\mathbb{C}}}$ $b(v_i, v_j) = \overline{b(v_j, v_i)}$

hermitianità

e $b(v_i, v_i) \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \boxed{{}^t M_B(b) = \overline{M_B(b)}} \leftarrow \text{complesso coniugato}$$

Def.: $A \in M_n(\mathbb{C})$, A si dice HERMITIANA se

$${}^t A = \overline{A}$$

FORMA MATRICIALE per PS complesso:

$z, w \in V$ sv su $\mathbb{C}$

$\mathcal{B}$ base di V

x = colonna delle coord. di z in $\mathcal{B}$

y = colonna delle coord. di w in $\mathcal{B}$

$$b(z, w) = \underset{1\times n}{{}^t\bar{x}} \cdot \underset{n\times n}{M_{\mathcal{B}}(b)} \cdot \underset{n\times 1}{y}$$

$$x = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{pmatrix}$$

$${}^t\bar{x} = (\bar{z}_1 \ \bar{z}_2 \ \dots \ \bar{z}_n)$$

Dim: Forma matriciale: esercizio, basta scrivere $b(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n, b_1 v_1 + \dots + b_n v_n) =$

$\mathbb{R}$: usate $\boxed{PS}$ $= \sum_{i,j=1}^{n} a_i \, b(v_i, v_j) \, b_j$

$$(a_1 \dots a_n) \cdot M_{\mathcal{B}}(b) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \nearrow$$

in $\mathbb{C}$: analogo

$$b(z_1 v_1 + \dots + z v_n, w_1 v_1 + \dots + w_n v_n) = \dots$$

NORMA

Def.: V SV su $\mathbb{R}$, b PS su V, $\dim V = n$

$\rightarrow$ (V, b) si dice **SPAZIO EUCLIDEO**

Se V SV su $\mathbb{C}$, b PS su V, $\dim V = n$

$\Rightarrow$ (V, b) si dice **SPAZIO UNITARIO**.

* * *

Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Def.: Un'appl. $N : V \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice **NORMA su V** se:

① $N(\lambda \cdot v) = |\lambda| \, N(v)$, $\lambda \in \mathbb{K}$

↳ valore reale, ovvero modulo

② $N(v + w) \leq N(v) + N(w)$

DISEG. TRIANG.

③ $N(v) = 0 \iff v = 0_V$

PROP.: Se V è spazio EUCLIDEO opp. spazio UNITARIO, non necessariamente di dimensione finita, allora la funzione

$$\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\|v\| := \sqrt{\underbrace{b(v, v)}_{\geq 0}}$$

è una NORMA su V.

Def: Dato V sp. euclideo opp. unitario, possiamo definire una DISTANZA in V

$$d(v,w) := \|w-v\| = \sqrt{b(w-v,\, w-v)}$$

Esempi non standard:

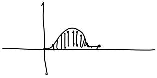
① Cons. $V = \mathbb{R}[t]$ polinomi

un PS su V: $p(t),\ g(t) \in \mathbb{R}[t]$

$$\langle p(t), g(t)\rangle := \int_0^1 p(t)\cdot g(t)\,dt$$

$$\langle p(t), p(t)\rangle = \int_0^1 \underbrace{(p(t))^2}_{\geq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}} \cdot dt \geq 0$$

e $= 0$



$\iff$ $p(t) \equiv 0$ polinomio costante nullo

$\Rightarrow$ posso def. $\|p(t)\| = \sqrt{\int_0^1 (p(t))^2 dt}$

② $V = M_{m,n}(\mathbb{R})$

$b: V \times V \to \mathbb{R}$

$$b(\underbrace{A}_{m\times n}, \underbrace{B}_{m\times n}) := \mathrm{Tr}\,(\underbrace{\overset{n\times m}{{}^tB} \cdot \overset{m\times n}{A}}_{n\times n}) \text{ è PS}$$

$\downarrow$
traccia di una matrice
quadrata

Def.: $\mathrm{Tr}\, M = m_{11} + m_{22} + \dots + m_{nn}$
$= \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$

Si prova che Tr non cambia se le matrici
simili.

$\mathrm{Tr}({}^tB \cdot A)$ è PS: (PS1) bilinearità facile

(PS2) simmetria :

$$\langle A,B\rangle = b(A,B) = \mathrm{Tr}\,(\underline{{}^tB\cdot A})$$

$$\langle B,A\rangle = b(B,A) = \mathrm{Tr}\,(\underline{{}^tA\cdot B})$$

$${}^t({}^tB\cdot A) = {}^tA\cdot {}^t({}^tB) = {}^tA\cdot B$$

$$\langle A,A\rangle = \mathrm{Tr}\,({}^tA\cdot A)\geq 0$$

$$\underset{{}^tA}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{1n} & \vdots & & \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{21}^2 + \dots + a_{m1}^2 & \cdots & \cdots \\ \vdots & a_{12}^2 + \dots + a_{n2}^2 & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\|A\| = \sqrt{\langle A,A\rangle} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2$$

$$\|A-B\|$$

ANGOLO CONVESSO TRA VETTORI

Teorema: DISEGUAGLIANZA DI CAUCHY-SCHWARZ

Sia V sv euclideo o unitario; $b = \langle\cdot,\cdot\rangle$

$\forall\, v, w \in V$ si ha

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\cdot\|w\|$$

↓ valore ass
ovvero modulo

Dim. Idea:

Se $w = 0_V \Rightarrow \langle v, 0_V\rangle = 0$

$$\|0_V\| = 0$$

$$|\langle v, 0_V\rangle| \leq \|0_V\|\cdot\|v\|$$

$= 0$ $\qquad = 0$ $\qquad$ ok.

Se $w \neq 0_V$, poniamo

$$\lambda := \frac{\overline{\langle v, w \rangle}}{\langle w, w \rangle} \leftarrow \text{coniugato}$$

$$0 \leq \langle v - \lambda w, v - \lambda w \rangle =$$

$\downarrow$

PS3

Come conseguenze: caso $\mathbb{R}$

se $v \neq 0_V$, $w \neq 0_V$

$\|v\| \neq 0$, $\|w\| \neq 0$

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\| \quad / : \|v\| \cdot \|w\|$$

$$\frac{|\langle v, w \rangle|}{\|v\| \, \|w\|} \leq 1$$

$$\Longrightarrow -1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \, \|w\|} \leq 1$$

DEF. L'angolo convesso α tra v e w

$$\alpha := \arccos \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \, \|w\|} \in [0, \pi]$$

$$\cos \alpha = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \, \|w\|}$$

$$\boxed{\langle v, w \rangle = \|v\| \, \|w\| \cos \alpha}$$