# Esercitazione 15 dicembre 2023

venerdì 15 dicembre 2023 14:18

Scritto 27/1/23, Es. ③

$$A_t = \begin{pmatrix}1 & t & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & t\end{pmatrix}$$

per quali $t \in \mathbb{R}$ è diagon.?

$$p_{A_t}(x) = \det\begin{pmatrix}1-x & t & 1\\ 0 & 1-x & -1\\ 0 & 0 & t-x\end{pmatrix}$$

$$= (1-x)^2 \cdot (t-x) = (1-x)(1-x)(t-x)$$

$Sp(A_t) = \{1, t\}$ ;

Due casi: $t = 1$ : $Sp(A_1) = \{1\}$, $m_a(1) = 3$

$t \neq 1$ : $Sp(A_t) = \{1, t\}$, $m_a(1) = 2$, $m_a(t) = 1$

$t = 1$ :

$$A_1 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

**Osservo che** $A_1$ non può essere diagonalizzabile. Se lo fosse, $\exists$

$S \in GL(3, \mathbb{R})$ t.c.

$$S \cdot A_1 \cdot S^{-1} = D$$

con D matrice diagonale, avente gli autovalori sulla diagonale, ripetuti tante volte quanto è la $m_a$.

Ho $Sp(A_1) = \{1\}$, $p_{A_1}(x) = (1-x)^3$

$m_a(1) = 3$

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = I_3$$

$\Rightarrow$ dovrei avere $I_3 = S \cdot A_1 \cdot S^{-1}$

$$\Leftrightarrow \underbrace{S^{-1} \cdot I_3 \cdot S}_{} = A_1$$

$= I_3 = A_1$ assurdo

Comunque, possiamo fare la verifica:

$\mathrm{Aut}(1) = \ker(A_1 - 1 \cdot \mathbb{I}_3)$

$\dim \mathrm{Aut}(1) = 3 - \mathrm{rg}(A_1 - 1 \cdot \mathbb{I}_3)$

$$A_1 - \mathbb{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rg}(A_1 - \mathbb{I}_3) = 2$

$\Rightarrow \dim \mathrm{Aut}(1) = 3 - 2 = 1$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{m_g(1)} \neq \underset{\substack{\parallel \\ 3}}{m_a(1)}$$

**$t \neq 1$** $\quad Sp(A_t) = \{1, t\}$

Calcolo $\dim \mathrm{Aut}(1)$ e $\dim \mathrm{Aut}(t)$

$\mathrm{Aut}(1) = \ker(A_t - 1 \cdot \mathbb{I}_3)$

$$A_t - 1 \cdot \mathbb{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & t-1 \end{pmatrix} \quad ; \ m_a(1)$$

$$\mathrm{rg}(A_t - \mathbb{I}_3) = \begin{cases} 1 & \text{se } t = 0 \ : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ 2 & \text{se } t \neq 0 \end{cases}$$

$$m_g(1) = 3 - \mathrm{rg}(A_t - \mathbb{I}_3) = \begin{cases} 3 - 1 = 2 & \text{se } t = 0 \ : \boxed{m_g(1) = 2 = m_a(1)} \\ 3 - 2 = 1 & \text{se } t \neq 0 \quad \Rightarrow A_t \text{ non è diagonalizz.} \\ < m_a(1) = 2 & \end{cases}$$

Cons $\mathrm{Aut}(t) = \ker(A_t - t \cdot \mathbb{I}_3) = \mathrm{Aut}(0)$

$$A_t - t \cdot \mathbb{I}_3 = \begin{pmatrix} \overset{\neq 0}{1-t} & t & 1 \\ 0 & \overset{\neq 0}{1-t} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$= A_0$

$\mathrm{rg}(A_t - t \cdot \mathbb{I}_3) = 2 \quad ; \quad \dim \mathrm{Aut}(t) = 3 - 2 = 1 = m_g(t)$

Lo sapevamo già:

$1 \le m_g(t) \le m_a(t) = 1$

$\Rightarrow m_g(t) = 1 = m_g(0)$

$\Rightarrow \boxed{A_t \text{ è diagonalizz. solo per } t=0.}$

Altra possibile scelta: $p_{A_t}(x) = (1-x)^2 \cdot (t-x)$

Calcolo $Aut(1)$; trovo che

$\dim Aut(1) = 2 \qquad t=0$

$\qquad\qquad = 1 \qquad \text{se } t \neq 0$

$$\left.\begin{array}{lll} m_g(1) & = 2 & \text{se } t=0 \\ & = 1 & \text{se } t\neq 0 \\ & & \\ m_a(1) & = 3 & \text{se } t=1 \\ & = 2 & \text{se } t\neq 1 \end{array}\right\}$$

unica possibilità per avere $m_g(1) = m_a(1)$ si ha per $t=0$, $m_g(1) = 2 = m_a(1)$

osservo poi che $m_a(0) = 1$

$\Rightarrow 1 \le m_g(0) \le m_a(0) = 1 \Rightarrow m_g(0) = 1$

Quindi: $m_g(1) + m_g(0) = 2+1 = 3 \Rightarrow A_0$ è diagonalizzabile

$A_0$ è simile a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

base di autovettori: base di $Aut(1)$ : 2 vettori

$\cup$ base di $Aut(0)$ : 1 vettore

Es. per $Aut(1)$: $(A_0 - 1 \cdot \mathbb{I}_3) \cdot X = 0$

$t=0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad x_3 = 0$$

soluzioni: $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$, $x_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ 0 \end{pmatrix} = s_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ scelgo come primi 2 vettori della base

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Aut}(0)$ : $(A_0 - 0 \cdot I_3) \cdot X = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

generica solz. $x_3 = s_3$, $x_2 = s_3$, $x_1 = -s_3$

$$\begin{pmatrix} -s_3 \\ s_3 \\ s_3 \end{pmatrix} = s_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ come vettore $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(L_{A_0})$$

$$= M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}^3}) \cdot \underbrace{M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(L_{A_0})}_{= A_0} \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(Id_{\mathbb{R}^3})$$

$$\begin{gathered} \| \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \end{gathered} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \boxed{-1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Big\downarrow \begin{array}{l} \overline{II} - \overline{III} \\ \overline{I} + \overline{III} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{= M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}^3})}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = P^{-1} \cdot A_p \cdot P$$

④ $\boxed{V = \ker p \oplus \operatorname{Im} p}$

Infatti: $\forall\, v \in V$, $\quad v = v - p(v) + p(v)$

e osservo che $v - p(v) \in \ker p$

e $p(v) \in \operatorname{Im} p$

Inoltre: $\ker p \cap \operatorname{Im} p = \{0_V\}$; infatti:

se $w \in \ker p \cap \operatorname{Im} p$, si ha: $p(w) = 0_V$

e $w = p(v)$ per qualche $v \in V$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow\ & p(p(v)) = 0_V \\ & = p(v) \end{aligned}\right\} \Rightarrow w = 0_V$$

voglio capire per quali $\lambda$ si ha

$$p(v) = \lambda \cdot v \quad , \quad \boxed{v \neq 0_V}$$

$$p(p(v)) = p(\lambda v)$$

$$\parallel$$

$$p(v) = \lambda \cdot p(v)$$

$$p(v) - \lambda \cdot p(v) = 0_V$$

$$(1-\lambda) \cdot \underbrace{p(v)} = 0_V$$

2 casi: $p(v) = 0_V$ , opp. $1 - \lambda = 0$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$v \in \underline{\ker p} = \underline{\operatorname{Aut}(0)} \qquad\qquad \lambda = 1$$

$$\Downarrow$$

$$v \in \operatorname{Aut}(1)$$

$$p^2 \equiv p$$

$\Rightarrow Sp(p) \subseteq \{0,1\}$

3 casi: $Sp(p)=\{0\}$, $Sp=\{1\}$, $\underline{Sp=\{0,1\}}$

p è SEMPRE DIAGONALIZZABILE: infatti

$V=\ker p \oplus \operatorname{Im} p$

$\ker p = Aut(0)$

$Aut(1) = \{ v : p(v) = 1\cdot v \}$

$\operatorname{Im} p = \{ \underline{w} : \exists\, v : \underline{p(v)=w} \}$

$\shortparallel$

$p(p(v))$

$p(w)=w$

$\Rightarrow Aut(1) = \operatorname{Im} p$

$\Rightarrow \boxed{V = \ker p \oplus \operatorname{Im} p = \underline{Aut(0) \oplus Aut(1)}}$

Infine: $\underline{p \text{ iniettivo}}$: $\underline{\ker p = \{0_V\}}$

$\Rightarrow V = Aut(1) \Rightarrow p = Id_V$

$Sp(p)=\{1\}$

Se $Sp(p)=\{0\}$

$V=\{0_V\}\oplus Aut(1)$

$\overset{!}{=} Aut(1)$

$V = \ker p$

$\Rightarrow p \equiv 0_V$

$\forall v \in V: \ p(v) = 1 \cdot v$

$\Rightarrow p = Id_V$

② $f$ iniettiva $\Rightarrow$ $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ LIN. INDIP

$\{v_1, \dots, v_n\}$ base di $V$

infatti: $f$ iniettiva $\Rightarrow$ $\dim \operatorname{Im} f = \dim V$

$\dim \ker f = 0$

in generale: $\{v_1, \dots, v_n\}$ base di $V$

$\Rightarrow \{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ generatori per $\operatorname{Im} f$

sono $n$, $n = \dim \operatorname{Im} f$

$\Rightarrow \{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ BASE di $\operatorname{Im} f$, **LIN IND**

Viceversa: $f(v_1), \dots, f(v_n)$ LIN. INDIP.

sono generatori per $\operatorname{Im} f$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = n$

$\Rightarrow \dim \ker f = n - \dim \operatorname{Im} f = n - n = 0$

$\Rightarrow \ker f = \{0_V\} \Rightarrow f$ iniettiva

OPPURE: VERIFICA DIRETTA

$\Longrightarrow$

$\boxed{f \text{ iniettiva}}$, $\underline{\{v_1, \dots, v_n\} \text{ base di } V}$

cons. $f(v_1), \dots, f(v_n)$

$a_1 f(v_1) + \dots + a_n f(v_n) = 0_V$

$f(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = 0_V$

$\Rightarrow a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \in \ker f = \{0_V\}$

$\Rightarrow a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0_V$, $v_1, \dots, v_n$ base

$\Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0$