Sottospazi affini

V spazio vettoriale reale o complesso ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$).

Def. Dato $u \in V$, la *traslazione di vettore u* è l'applicazione

$$t_u : V \to V$$
$$t_u(v) = u + v.$$

Oss. $t_u(0_V) = u$.

Prop. *Valgono le seguenti proprietà:*
$t_{0_V} = \mathrm{id}_V$
$t_u \circ t_w = t_{u+w}$
$t_u^{-1} = t_{-u}$
le traslazioni sono biiettive.

Dato $A \subset V$ denotiamo il suo traslato mediante $u \in V$ con

$$u + A \overset{\text{def}}{=} t_u(A) = \{u + a \mid a \in A\} \subset V.$$

Def. Un sottoinsieme $L \subset V$ è detto *sottospazio affine di V* se $\exists\, L_0 \subset V$ sottospazio vettoriale e $\exists\, u \in V$ t.c. $L = u + L_0$. L_0 è detto *giacitura* di L. Poniamo $\dim L \overset{\text{def}}{=} \dim L_0$.

$\underline{\dim L = 0}$ *Punto.*
$\underline{\dim L = 1}$ *Retta affine.*
$\underline{\dim L = 2}$ *Piano affine.*

Oss. I sottospazi affini sono i traslati dei sottospazi vettoriali.
Vettoriale $\not\Leftarrow\Rightarrow$ affine. Un sottospazio affine $L \subset V$ è vettoriale $\Leftrightarrow 0_V \in L$.

In particolare V stesso è sottospazio affine e si chiama anche *spazio affine*.

Oss. I sottospazi affini non sono vuoti.

Prop. *Dati $L_0 \subset V$ sottospazio vettoriale e $u \in V \Rightarrow \exists!\, L \subset V$ sottospazio affine passante per u e con giacitura L_0.*

Dim. Basta porre $L = u + L_0 \Rightarrow u = u + 0_V \in L$. □

Teorema di struttura per sistemi lineari. *Sia $S : AX = B$ un sistema lineare compatibile, con $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathbb{K}^m$. Allora $\Sigma_S \subset \mathbb{K}^n$ è un sottospazio affine con giacitura lo spazio delle soluzioni Σ_{S_0} del sistema omogeneo associato $S_0 : AX = 0_{\mathbb{K}^m}$. Quindi* $\dim \Sigma_S = \dim \Sigma_{S_0} = n - \mathrm{rg}(A)$.

Dim. $\Sigma_{S_0} = \ker L_A \subset \mathbb{K}^n$ sottospazio vettoriale, $\dim \Sigma_{S_0} = n - \mathrm{rg}\, A$.
Scegliamo una soluzione $s \in \Sigma_S$ (esiste perché S compatibile) $\Rightarrow As = B$.
$v \in \Sigma_S \Leftrightarrow Av = B = As \Leftrightarrow 0_{\mathbb{K}^m} = Av - As = A(v - s) \Leftrightarrow v - s \in \Sigma_{S_0}$
$\Leftrightarrow v \in s + \Sigma_{S_0} \Rightarrow \Sigma_S = s + \Sigma_{S_0}$. □

Equazione vettoriale. $L \subset V$ sottospazio affine passante per $u \in V$ e con giacitura L_0. Scegliamo una base $(w_1, \dots, w_k)$ per L_0.

$$L : v = t_1 w_1 + \cdots + t_k w_k + u$$

è detta *equazione vettoriale di* L. Al variare dei *parametri* $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{K}$ si ottengono tutti i punti di L.

Equazione parametrica. $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ base per V.
L'equazione vettoriale di L si scrive come

$$L : X = t_1 A_1 + \cdots + t_k A_k + B$$

dove X è il vettore delle coordinate di v, A_j di w_j e B di u, rispetto a $\mathcal{B}$.

$$L : \begin{cases} x_1 = a_{11} t_1 + \cdots + a_{1k} t_k + b_1 \\ \vdots \\ x_n = a_{n1} t_1 + \cdots + a_{nk} t_k + b_n \end{cases}$$

sono dette *equazioni parametriche* di L dove

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Equazione cartesiana. Eliminando i parametri $t_1, \dots, t_k$ dalle equazioni parametriche si ottengono le *equazioni cartesiane*

$$L : \begin{cases} c_{11} x_1 + \cdots + c_{1n} x_n = d_1 \\ \vdots \\ c_{m1} x_1 + \cdots + c_{mn} x_n = d_m \end{cases}$$

L è l'insieme dei punti le cui coordinate soddisfano questo sistema lineare.
L_0 è rappresentato dal sistema omogeneo associato.

Pertanto otteniamo l'inverso del Teorema di struttura: ogni sottospazio affine di $\mathbb{K}^n$ è lo spazio delle soluzioni di un sistema lineare compatibile.

Intersezione. $L, T \subset V$ sottospazi affini $\Rightarrow$

$$L \cap T = \{v \in V \mid v \in L \text{ e } v \in T\} \subset V$$

sottospazio affine oppure vuoto. Infatti mediante equazioni cartesiane

$$\begin{aligned} L &: AX = B \\ T &: CX = D \end{aligned} \qquad L \cap T : \begin{cases} AX = B \\ CX = D \end{cases}$$

Def. Due sottospazi affini L e $T \subset V$ con giaciture risp. L_0 e T_0 sono
(1) *incidenti* se $L \cap T \neq \emptyset$;

(2) *disgiunti* se $L \cap T = \emptyset$;

(3) *paralleli* se $L_0 \subset T_0$ oppure $T_0 \subset L_0$, e scriviamo $L \parallel T$;

(4) L e T sono *sghembi* se sono disgiunti e non paralleli.

Teor ("Postulato delle parallele")**.** *Supponiamo* $\dim V < \infty$*. Sia* $L \subset V$ *un sottospazio affine e* $u \in V$ *un punto qualsiasi. Allora* $\exists! \, T \subset V$ *sottospazio affine t.c.* $u \in T$, $T \parallel L$ *e* $\dim T = \dim L$*.*

Dim. L_0 giacitura di $L \rightsquigarrow T = u + L_0$. $\square$

Oss. Se $\dim L = \dim T$ allora $L \parallel T \Leftrightarrow L_0 = T_0$.

Per capire la posizione reciproca di due sottospazi affini si scrivono le equazioni cartesiane e si studia il sistema formato da tutte le equazioni messe insieme. Si applica Rouché-Capelli per capire la compatibilità e la dimensione dell'intersezione (se non vuota).

Indichiamo con A la matrice del sistema di tutte le equazioni coinvolte e con $\tilde{A}$ la matrice completa.

Rette in $\mathbb{R}^2$

Due rette in $\mathbb{R}^2$ hanno equazioni

$$\begin{aligned} r:&\ \ ax+by=c \\ s:&\ \ dx+ey=f \end{aligned}$$

$r = s$ se rg $\tilde{A} = 1$
$r \parallel s$ e disgiunte se rg $A = 1$ e rg $\tilde{A} = 2$
$r \cap s =$ punto se rg $A = 2$.

Sottospazi affini di $\mathbb{R}^3$

Due piani.

$$\begin{aligned} L:&\ \ ax+by+cz=d \\ T:&\ \ ex+fy+gz=h \end{aligned}$$

$L = T$ se rg $\tilde{A} = 1$
$L \parallel T$ e disgiunti se rg $A = 1$ e rg $\tilde{A} = 2$
$L \cap T =$ retta se rg $A = 2$.

Retta e piano.

$$r: \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$$

$$L: \quad ex+fy+gz=h$$

$r \subset L$ se rg $\tilde{A} = 2$
$r \parallel L$ e disgiunti se rg $A = 2$ e rg $\tilde{A} = 3$
$r \cap L =$ punto se rg $A = 3$.

Due rette.

$$r: \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases} \qquad s: \begin{cases} ex+fy+gz=h \\ e'x+f'y+g'z=h' \end{cases}$$

$r = s$ se rg $\tilde{A} = 2$
$r \parallel s$ e disgiunte se rg $A = 2$ e rg $\tilde{A} = 3$
$r \cap s =$ punto se rg $A =$ rg $\tilde{A} = 3$
r e s sghembe se rg $\tilde{A} = 4$.