FISICA DELL'AMBIENTE

Fenomeni Ondulatori:

- Onde elastiche o di pressione: Hanno bisogno di un mezzo materiale per propagarsi, e la loro propagazione e' dovuta all'interazione tra gli atomi o le molecole del mezzo (e.g. onda sonora, o onda su una corda tesa)

Possono essere trasversali o longitudinali

oscillano lungo l'asse di propagazione

⇓

Ma non c'e' trasporto di materia (atomi o mol. oscillano attorno a posizione di eq.io)

⇒ Vengono trasportate energia e quantita' di moto

In generale: Onda una qualsiasi perturbazione, impulsiva o periodica, che si propaga ad una velocita' ben definita.

- Onde elettromagnetiche: Non hanno bisogno di un mezzo per propagarsi (e.g. luce del sole) ma posso propagarsi anche nei materiali. Esse hanno origine da una perturbazione del campo elettrico e/o magnetico, prodotti da cariche in moto.

Sono solo trasversali (ovvero oscilla in un piano ⊥ a quello di propagazione)

Formalmente è un'eq.ne differenziale alle derivate parziali del II ordine, a coefficienti costanti, lineare in ξ
omogenea (termine noto = $\emptyset$)

* Equazione delle onde di d'Alembert: $\nabla^2 \xi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ Operatore Laplaciano

Se applicato ad un campo scalare

$$\nabla^2 S = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial S^2}{\partial y^2} + \frac{\partial S^2}{\partial z^2}$$

Se applicato ad un campo vettoriale:

$$\nabla^2 \vec{F} = \left(\nabla^2 F_x ; \nabla^2 F_y ; \nabla^2 F_z\right)$$ dove $\nabla^2 F_i = \frac{\partial^2 F_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial z^2}$

v = Velocità propagazione dell'onda

La perturbazione di un campo che si propaga nello spazio viene rappresentata con la funzione:

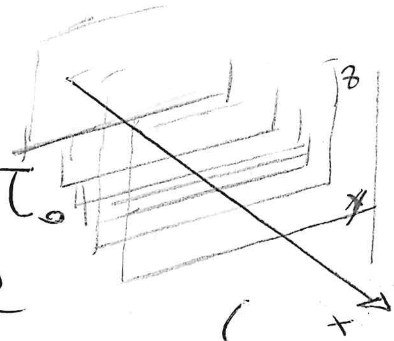
Questo e' un campo generico tipo $\vec{E}, \vec{B}$

$$\xi(x, y, z, t) \quad \text{Funzione d'onda}$$

e soddisfa $\nabla^2 \xi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$ *

* Onda Piana Unidimensionale: $\xi(x, t)$

dipende solo dalla coordinata lungo cui si propaga, x, in quanto la perturbazione in un certo istante t_0 assume lo stesso valore $\forall$ p.to del piano ortogonale (yz). In questo caso:



Nota: Un'onda molto lontana dalla sua sorgente può essere spesso approx. con un onda piana

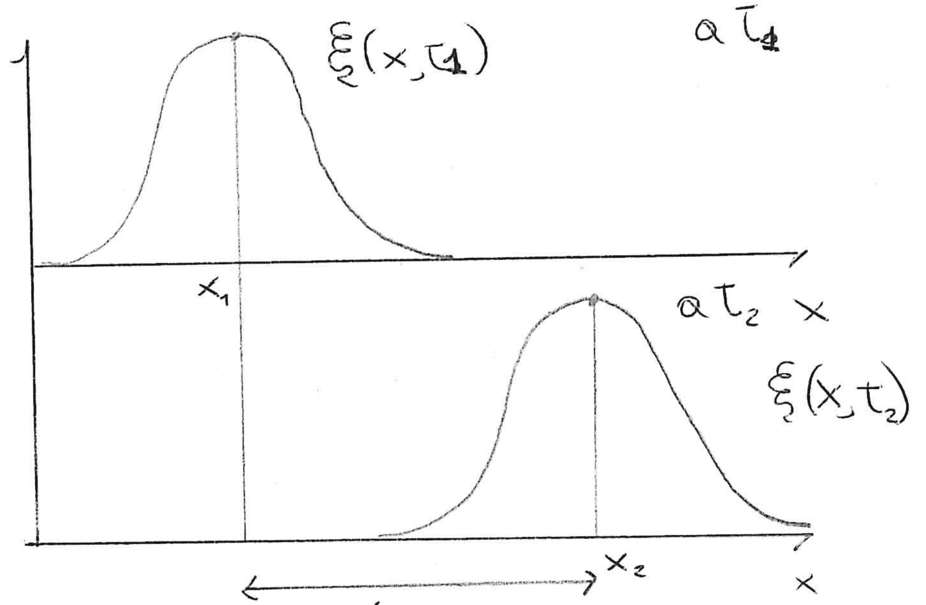
$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

=> Si dimostra che le funzioni d'onda soluzioni dell'eq.ne di d'Alembert sono quelle le cui variabili soddisfano:

$$\xi(x - vt), \; \xi(x + vt)$$

ovvero l'argomento di ξ e' una combinazione lineare delle variabili x e t.

*)



$\Delta x = v(t - t_0)$

Valido $\forall$ p.to

Sono quindi soluzioni e.g.:

$$\xi = (x-vt)^2 \,, \quad \xi = \xi_0 \operatorname{sen} k(x-vt) \,, \quad \xi = \xi_0 e^{k(x-vt)}$$

e loro combinazioni lineari, mentre NON lo sono e.g. $\xi = x \cdot v \cdot t$ o $\xi = x/vt$.

Questa é conseguenza del fatto che l'eq.ne di d'Al. e' lineare in ξ.

Fisicamente $\xi(x \pm vt)$ rappresenta la propagazione della perturbazione lungo l'asse x con velocità v; il valore $\xi_0 = \xi(x_0, t_0)$ si ritrova in qualsiasi istante successivo $t > t_0$ nel p.to x che soddisfi la condizione:

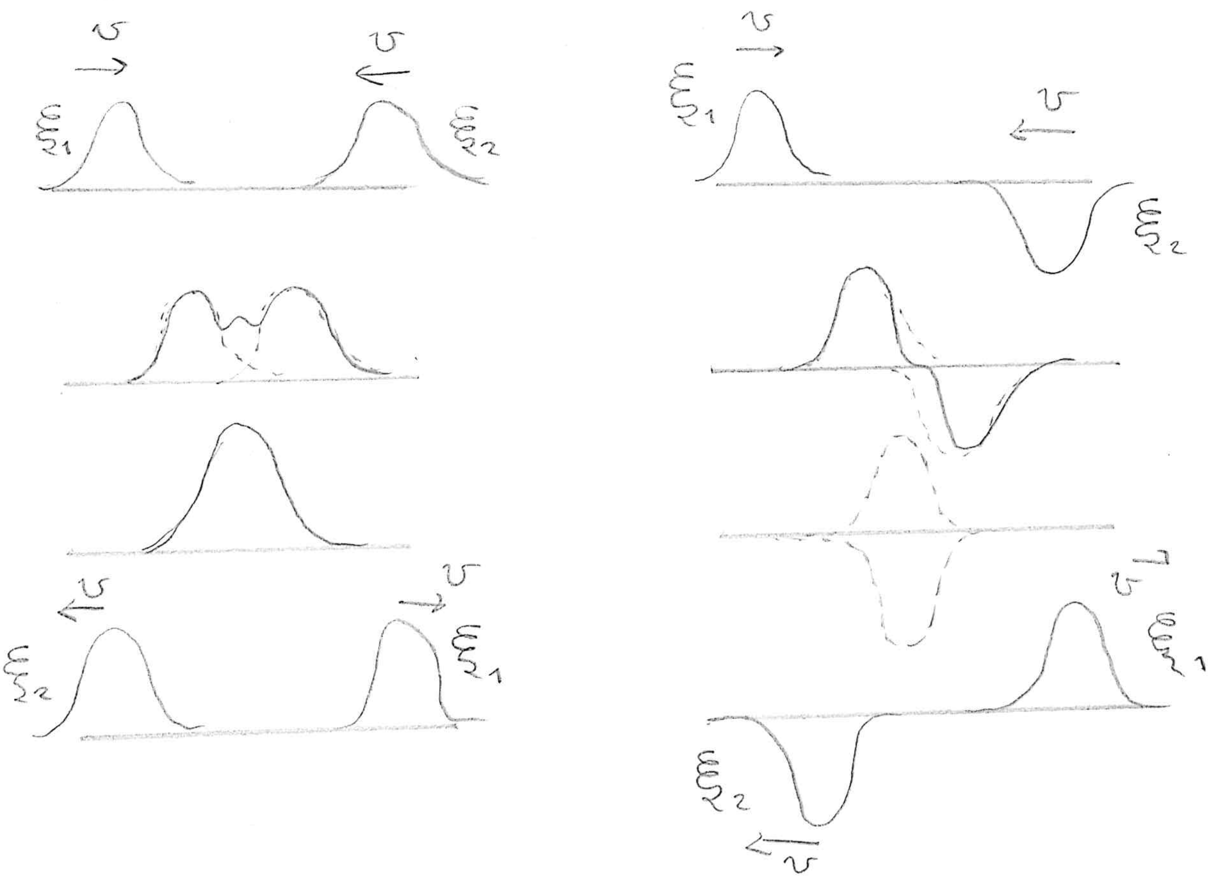
*) $$x \pm vt = x_0 \pm v_0 t_0 \Rightarrow \underbrace{x = x_0 \pm v(t-t_0)}_{\text{eq.ne moto rettilineo lungo } x}$$

Ovvero quando la funzione d'onda ha lo stesso argomento

Segno "+" propagazione nel verso di x

Segno "−" propagazione verso negativo di x

Nota: La linearità (in ξ) dell'eq.ne di d'Alembert implica che la somma di due funzioni ξ_1 & ξ_2 soluzioni dell'eq.ne, è ancora soluzione dell'eq.ne: ovvero la sovrapposizione di 2 onde è ancora un onda, che si ottiene p.to x p.to ed istante x istante sommando ξ_1 e ξ_2. Questo implica che le 2 onde restano indipendenti, anche se agiscono insieme, e non vengono modificate l'una dalla presenza dell'altra. Questo principio di sovrapposizione è all'origine del fenomeno dell'interferenza.



$\therefore$ $\xi(x \pm vt)$ soddisfa d'Alembert:

definiamo $u = x - vt$

per cui $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 1$ & $\dfrac{\partial u}{\partial t} = -v$

derivata funzione composta $\dfrac{\partial f(g(x))}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial g}\dfrac{\partial g}{\partial x}$

$$\frac{\partial \xi(u)}{\partial x} = \frac{\partial \xi(u)}{\partial u}\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=1} = \frac{\partial \xi}{\partial u}$$

$$\frac{\partial^2 \xi(u)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}_{=1} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \qquad *$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} =$$

$\dfrac{\partial \xi}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}$

$$= \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \cancel{\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

0 poiché $u = x - v$

$$\frac{\partial \xi(u)}{\partial t} = \frac{\partial \xi(v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} = -v\frac{\partial \xi}{\partial u}$$

$$\frac{\partial^2 \xi(u)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi(u)}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = v^2\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \qquad **$$

da $*$ & $**$ si ricava che

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \qquad \text{c.v.d.}$$

Onde piane Armoniche: (1D)

$$\xi(x,t) = \xi_0 \,\text{sen}[k(x-vt)]$$

Analogamente potevo usare il coseno

ξ_0 = Ampiezza Onda

k = numero d'onde

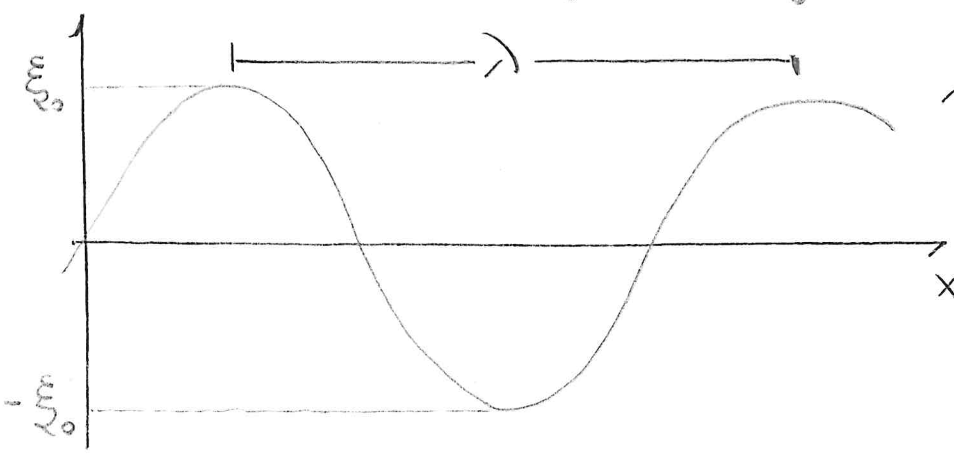
In genere si definisce la pulsazione:

$$\omega = kv$$

$$\xi(x,t) = \xi_0 \,\text{sen}(\underbrace{kx-\omega t})$$

Così definita è una quantità adimensionale come giusto per l'argomento di un seno

Ad un dato t: (come se facessi una foto)

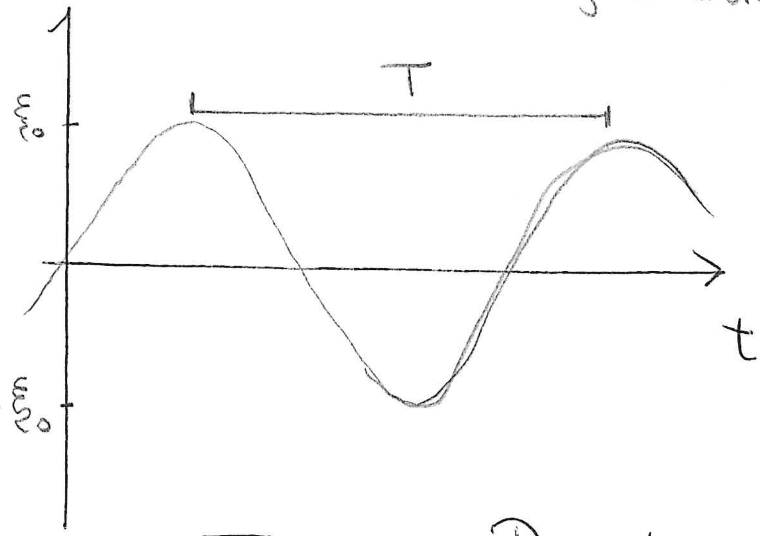


Seno è una funzione con periodo 2π, quindi dati 2 p.ti x_1 e x_2 per cui val la relazione $k\underbrace{(x_1-x_2)}_{\lambda} = 2\pi$, la funzione si replica identica

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$ lunghezza d'onda

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$ => # di lunghezze d'onda in 2π metri: Una sorta di pulsazione "spaziale"

per un x fissato analogamente:
↳ Come se guardassi un solo punto



$\Rightarrow$ l'onda si ripete identica per intervalli di tempo che soddisfano

$$\omega\underbrace{(t_1 - t_2)}_{T} = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$ Periodo dell'onda → quindi $\omega = \frac{2\pi}{T}$, # di periodi in 2π secondi

Altre due grandezze derivate sono

- $n = \frac{1}{\lambda}$ $[m^{-1}]$ # di lunghezze d'onda in un metro

- $\nu = \frac{1}{T}$ $[s^{-1}]$ frequenza, ovvero il numero di battiti in un secondo

Dalle relazioni precedenti troviamo le relazioni:

$$\underset{2\pi}{\underset{\parallel}{K\lambda}} = \underset{2\pi}{\underset{\parallel}{T\omega}} \Rightarrow K\lambda = T\underbrace{Kv}_{\omega} \Rightarrow \lambda = vT \rightarrow$$ Questa relazione ci dice che in un periodo T, l'onda avanza di λ

&

$$\nu\lambda = v$$

Ovvero le tre grandezze che descrivono un'onda armonica NON sono indipendenti

Nota: Da un punto di vista fisico il periodo (e quindi ν e ω) di un'onda em è determinato solamente dalle caratteristiche della sorgente, mentre la velocità di propagazione, e quindi λ e K, dal mezzo di propagazione.

→ Fronte d'onda:

Definita la fase dell'onda:

$$\phi = Kx - \omega t$$

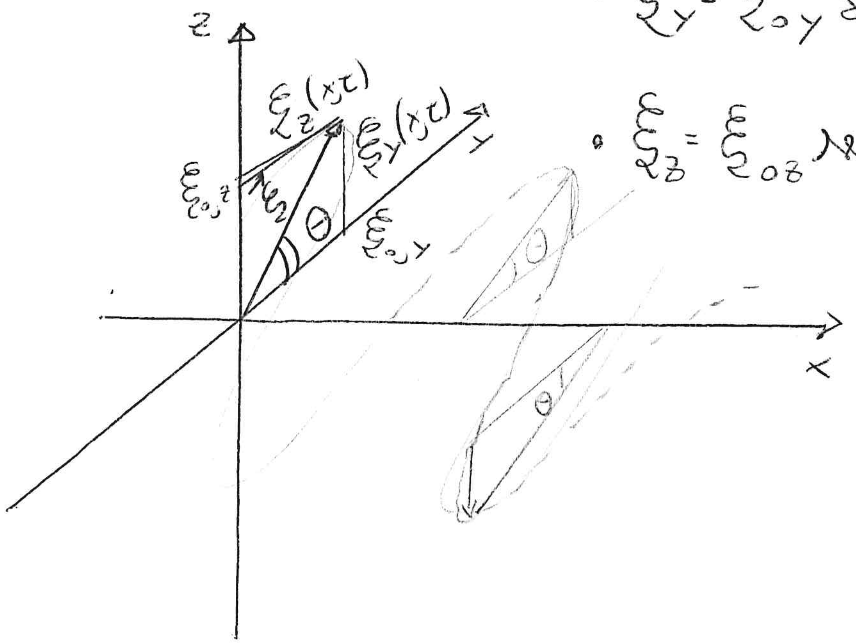
possiamo definire il fronte d'onda il luogo di p.ti dello spazio in cui, ad un dato istante, la fase è costante, ovvero la funzione d'onda ξ ha valore costante. E.g. per un'onda piana, il fronte d'onda corrisponde al piano ⊥ alla direzione di propagazione, e quest'ultimo si sposta alla velocità v.

→ Polarizzazione di un onda:

Consideriamo un'onda piana trasversale che si propaga lungo x. La funzione d'onda può essere espressa come:

ovvero oscilla in un piano ⊥ a quello di propagazion

$$\vec{\xi}(x,t) = \left(\xi_y(x,t), \xi_z(x,t)\right)$$



- $\xi_y = \xi_{0y} \sin(kx - \omega t)$
- $\xi_z = \xi_{0z} \sin(kx - \omega t + \delta)$

Sfasamento tra le componenti.

→ Se la direzione di $\vec{\xi}$ nel piano yz non varia casualmen l'onda si dice polarizzata.

Consideriamo il caso δ = costante

→ $\delta = 0$: Componenti in fase; in ogni punto dell'as x, ed ad ogni istante $\vec{\xi}$ ha direzione fissa, formante con l'asse y l'angolo

$$\operatorname{Tg}\theta = \frac{\xi_z}{\xi_y} = \frac{\xi_{0,z}}{\xi_{0,y}} = \text{costante}$$

→ Il rapporto tra le ampiezze delle due componenti rimane costante

* Il modulo del campo risulta:

$$|\xi| = \sqrt{\xi_y^2 + \xi_z^2} = \left[\xi_0^2 \left(\underbrace{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}_{1}\right) \operatorname{sen}^2(kn - \omega t)\right]^{1/2} =$$

$$= \xi_0 \operatorname{sen}(kn - \omega t) \Rightarrow \text{oscilla tra } \pm \xi_0$$

** $\xi_{0,z}^2 \xi_y^2 + \xi_{0,y}^2 \xi_z^2 = \xi_{0,z}^2 \xi_{0,y}^2 \operatorname{sen}^2(kx_0 - \omega t) +$

$+ \xi_{0,y}^2 \xi_{0,z}^2 \cos^2(kx_0 - \omega t) = \xi_{0,z}^2 \xi_{0,y}^2$

divido 1° ed ultimi termine dell'uguaglianza per $\xi_{0,y}^2 \xi_{0,z}^2$ ed ottengo eq.ne ellisse

• $\delta = \pi$: Opposizione di fase : $\vec{\xi}$ ha sempre direzione costante, ma l'angolo con x è $-\theta$ $\rightarrow$ $\operatorname{sen}(x+\pi) = -\operatorname{sen}(x)$

$\Rightarrow$ Se $\vec{\xi}$ ha direzione fissa l'onda si dice Pol.ta Linearmente

- Detta ξ_0 l'ampiezza dell'onda, le componenti hanno ampiezza $\xi_{0,z} = \pm \xi_0 \operatorname{sen}\theta$ e $\xi_{0,y} = \xi_0 \cos\theta$:

"+" per $\delta = 0$ e "−" per $\delta = \pi$

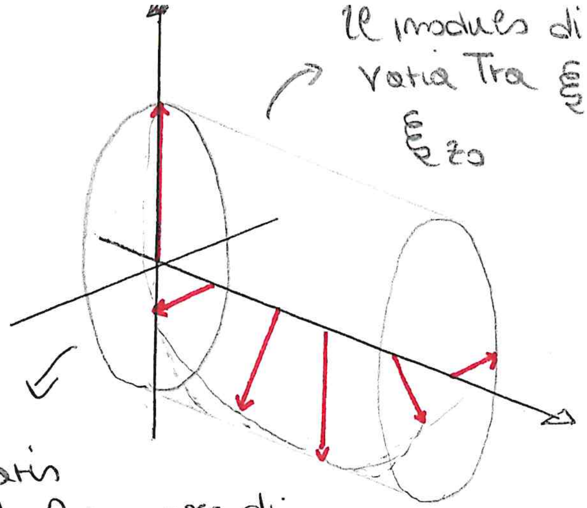
$$* \quad \vec{\xi}(x,y) = \overbrace{\xi_0 \cos\theta}^{\xi_{0,y}} \operatorname{sen}(kx-\omega t)\,\hat{u}_y + \pm \underbrace{\xi_0 \operatorname{sen}\theta}_{\xi_{0,z}} \operatorname{sen}(kx-\omega t)\,\hat{u}_z$$

Onda piana data dalla sovrapposizione di 2 onde piane polarizzate linearmente lungo y e z

• $\delta = \frac{\pi}{2}$: In questo caso, dato che $\operatorname{sen}(x+\frac{\pi}{2}) = \cos(x)$ abbiamo $\xi_z = \xi_{0,z}\cos(kx-\omega t)$ in un p.to dell'asse x, ed in ogni istante t vale la relazione:

$$** \quad \frac{\xi_y^2}{\xi_{0,y}^2} + \frac{\xi_z^2}{\xi_{0,z}^2} = 1 \quad \Rightarrow$$

Equazione di un'ellisse nel piano yz, ed assi // agli assi coordinati



Il vettore $\vec{\xi}$ descrive un ellisse con periodo di rotazione $\frac{2\pi}{\omega}$, ~~che~~ ~~gir~~ e passo λ. ↳ oggetto da T o λ compie un giro

⇓

Onda polarizzata ellitticamente

Analogamente per $\delta = \frac{3}{2}\pi$ si ha una polarizzazione ellittica, ma che ruota in senso ANTIORARIO guardando la direzione di propagazione.

Nel caso $\xi_{0,y} = \xi_{0,z} = \xi_0$ l'ellisse degenera in una circonferenza e l'onda si dice polarizzata circolarmente:

$$\xi_y^2 + \xi_z^2 = \xi_0^2$$

→ In questo caso l'ampiezza dell'onda è costante in modulo.

In generale se δ = "costante generico", l'onda è polarizzata ellitticamente, ma con gli assi non // agli assi coordinati.

→ Se δ non è esprimibile con una legge l'onda si dice NON polarizzata

↓ oggetto varia casualmente

1. Esprime la dipendenza tra campo elettrico e carica elettrica

2. Non esistono monopoli magnetici

4. Un campo B variabile nel tempo è sorgente di campo E

3. Le sorgenti di B sono le correnti di conduzione (nulle nel vuoto) e campo E variabile nel tempo ($\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$ corrente di spostamento)

Reminder: Eq. Maxwell nella materia

$$\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{S} = q \quad (\text{cariche libere}) \qquad \oint_{e} \vec{E} \cdot d\vec{e} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \qquad \oint_{e} \vec{H} \cdot d\vec{e} = i + \frac{d\Phi_D}{dt}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \qquad \vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$$

Nel vuoto $\Rightarrow$ con cariche e correnti

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = q/\varepsilon_0 \qquad \oint_{e} \vec{E} \cdot d\vec{e} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \qquad \oint_{e} \vec{B} \cdot d\vec{e} = i\mu_0 + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Reminder:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \underbrace{(\partial_y A_z - \partial_z A_y)}_{(\vec{\nabla} \times \vec{A})_x} \hat{u}_x + \underbrace{(\partial_x A_z - \partial_z A_x)}_{(\vec{\nabla} \times \vec{A})_y} \hat{u}_y + \underbrace{(\partial_x A_y - \partial_y A_x)}_{(\vec{\nabla} \times \vec{A})_z} \hat{u}_z$$

→ Se so che il campo E & B soddisfano l'eq.ni di Maxwell, allora $\vec{E}$ & $\vec{B}$ mi rappresenteranno un'onda che si propaga (ovvero soddisfano Eq. d'Alembert

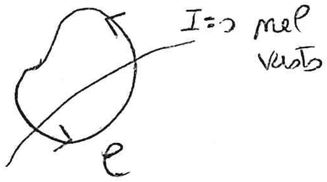
⇝ Partiamo da Eq. Maxwell nel vuoto: (forma integrale)

$$
\begin{cases}
1) \ \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0 & \text{Legge di Gauss per } \vec{E} \\
2) \ \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 & \text{" " per } \vec{B} \\
3) \ \oint_e \vec{B}\cdot d\vec{e} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt} & \text{Legge Ampere - Maxwell} \\
4) \ \oint_e \vec{E}\cdot d\vec{e} = -\frac{d\Phi_B}{dt} & \text{Legge Faraday - Lenz}
\end{cases}
$$

2) → Sempre zero perché non ci sono monopoli magnetici

3) Φ_e → Flusso Elettrico

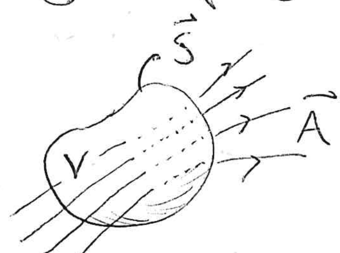
4) Φ_B → Flusso magnetico



→ Ricordiamo il Teorema della divergenza (di Gauss)

$$
a) \ \underbrace{\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}}_{\text{flusso } \vec{A} \text{ attraverso } \vec{S}} = \int_V \overbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})}^{\text{div } A} \, dV
$$

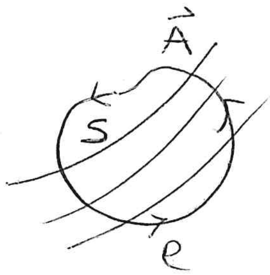
V → Volume racchiuso dalla superficie



→ Ricordiamo il Teorema del Rotore (di Stokes)

$$
b) \ \underbrace{\oint_e \vec{A}\cdot d\vec{e}}_{\text{Circuitazione del campo } \vec{A}} = \underbrace{\int_S \overbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{A})}^{\text{Rot } A} \cdot d\vec{S}}_{\text{flusso del rotore sulla superficie racchiusa dal circuito } e}
$$

N.B. Qualsiasi superficie che poggi su e



Nota: Da $\mathring{3}$ & $\mathring{4}$ é chiaro che in presenza di campi variabili nel Tempo, i campi $\vec{E}$ & $\vec{B}$ sono INSCINDIBILI: la presenza di uno comporta la presenza dell'altro => Per questo si parla di campo Elettromagnetico

- Reminder: dati S scalare e $\vec{A}$ vettore

$$\nabla^2 S = \partial_x^2 S + \partial_y^2 S + \partial_z^2 S \Rightarrow \text{Scalare}$$

$$\nabla^2 \vec{A} = (\nabla^2 A_x)\hat{u}_x + (\nabla^2 A_y)\hat{u}_y + (\nabla^2 A_z)\hat{u}_z \Rightarrow \text{Vettore}$$

applico a) a 1) & 2) e b) a 3) & 4)

$$\tilde{1})\ \int_V \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right) dV = 0$$

$$\tilde{2})\ \int_V \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right) dV = 0$$

Inverto $\int$ e $\frac{d}{dt}$

$$\tilde{3})\ \int_S \left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right) d\vec{S} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\overbrace{\left(\int_S d\vec{E}\cdot d\vec{S}\right)}^{\text{flusso campo elettrico}} = \int_S \mu_0\varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}\cdot d\vec{S}$$

$$\tilde{4})\ \int_S \left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\int_S d\vec{B}\cdot d\vec{S}\right)}_{\text{flusso campo magnetico}} = \int_S \frac{d\vec{B}}{dt}\cdot d\vec{S}$$

Essendo $\hat{1}$ & $\hat{2}$ valide $\forall$ volume, ~~deve valere~~ e $\tilde{3}$ & $\tilde{4}$ $\forall$ superficie:

$$\begin{cases} \dot{1} & \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \\ \dot{2} & \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ \dot{3} & \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{d\vec{E}}{dt} \\ \dot{4} & \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{d\vec{B}}{dt} \end{cases}$$

Eq.ni di Maxwell in forma differenziale

Regola utile: $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) = \overset{\text{grad}}{\vec{\nabla}}\left(\overset{\text{div}}{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}}\right) - \nabla^2\vec{A}$

Laplaciano $\nabla^2 = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$

(12 Eq.ne e 6 incognite => quindi soluzione definita)

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) = \vec{\nabla}\underbrace{\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)}_{0\ \text{per}\ \dot{1}} - \nabla^2\vec{E} \overset{\text{da}\ \dot{4}}{=} -\vec{\nabla}\times\left(\frac{d\vec{B}}{dt}\right)$$

$$\Rightarrow \nabla^2\vec{E} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right) \overset{\text{per}\ \dot{3}}{=} \frac{d}{dt}\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{d\vec{E}}{dt}\right) = \mu_0\varepsilon_0\frac{d^2\vec{E}}{dt^2}$$

$$\nabla^2\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0\frac{d^2\vec{E}}{dt^2} = 0 \Rightarrow$$ Eq.ne delle onde di d'Alembert

Componendo con l'eq.ne delle onde si ricava che: $\frac{1}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \simeq 3 \cdot 10^5 \text{ Km/s}$

Velocità propagazione

Con gli stessi passaggi, partendo da 3:

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow$$ Eq.ne di un'onda Magnetica

Introducendo il d'Alembertiano: $\Box \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$

Operatore Differenziale

$$\begin{cases} \Box \vec{E} = 0 \\ \Box \vec{B} = 0 \end{cases}$$

→ Ovvero l'eq.ne di Maxwell implicano che il campo elettrico e magnetico si propagano come delle onde che si dimostra viaggiare in modo perpendicolare tra loro alla velocità c.

Nota su numeri complessi e la coordinata temporale:

$$\vec{E}(\vec{x}; \cancel{ct}) \xrightarrow[u = ict]{\text{cambio variabile}} \vec{E}(\vec{x}, u)$$

$\vec{x}$: x, y, z

$u = ict$ ← immaginario

Derivata Temporale del d'Alembertiano:

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

proviamo: $\Rightarrow \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial ict}\frac{\partial \vec{E}}{\partial ict} = \frac{\partial}{\partial ict}\left[\frac{1}{ic}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right] =$

$$= \frac{1}{(ic)^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Quindi il d'Alembertiano altro non è che il Laplaciano ~~[illegible]~~ quadridimensionale:

$$\Box = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial u^2}$$