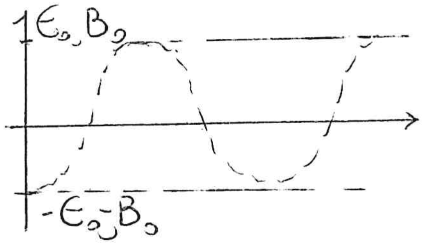
14/12

• funzione d'onda per i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ (o forma) — Onda piana Trasversale

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 \,\mathrm{sen}(kx - \omega t) \\ \vec{B} = \vec{B}_0 \,\mathrm{sen}(\underbrace{kx - \omega t}_{\text{quantità adimensionale}}) \end{cases}$$

questo è 1 forma d'onda, ma ne esistono ∞

$\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$ ampiezza dell'onda



con $k = \dfrac{\overbrace{2\pi}^{\text{periodicità del seno}}}{\lambda} = 2\pi n$

k: sarebbe una "pulsazione" spaziale

λ: lunghezza d'onda (periodicità spaziale)

pulsazione $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ frequenza $[s^{-1}]$ = Hz

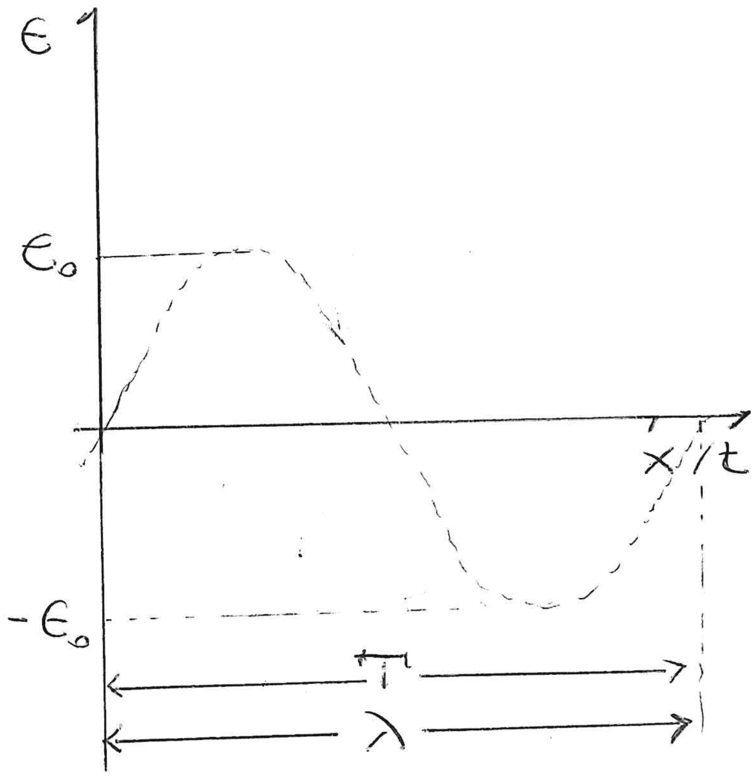
T: periodo (periodicità temporale)

• Numero d'onde $n = \dfrac{1}{\lambda}$ $[m^{-1}]$

\# di onde in 1 metro

• Frequenza: $\nu = \dfrac{1}{T}$ [s

\# di battiti in un secondo



• Onda piana la posso descrivere come un'onda che si propaga in una dimensione (e.g. asse x) ed è uniforme nel piano ortogonale (e.g. piano yz). In genere, onde a grandi distanze dalla sorgente possono essere approssimate con un onda piana (e.g. luce proveniente dal sole)

* Le altre due componenti del campo E_y & E_z sono $\neq 0$ e soddisfano l'eq.ne delle onde:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

Un'onda piana è Trasversale, ovvero oscilla lungo il piano $\perp$ all'asse di propagazione.

→ In generale le onde possono essere Trasversali e Longitudinali

(e.g. in genere le onde acustiche)

Questo può essere ∴ con le eq.ni di Maxwell:

Consideriamo onda piana che propaga lungo x:

$$\overbrace{\frac{\partial E_x}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial y}}_{0} + \underbrace{\frac{\partial E_z}{\partial z}}_{0}}^{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}} = 0 \Rightarrow E_x \text{ costante in } x \Rightarrow \text{ovvero } E_x = 0$$

a meno di campi elettrostatici (che visto che parliamo di onde non ci interessa)

poiché componenti E_y & E_z sono costanti lungo y e z ovvero variano solo lungo x

ovvero $E_y(x,t)$ $E_z(x,t)$

Abbiamo quindi dimostrato che l'onda e.m. è nulla lungo la direzione di propagazione, ovvero non oscilla lungo la direzione di propagazione, * e quindi dovrà oscillare lungo il piano Trasversale (stesso cosa per B)

osservando che $B_x = 0$ dato che nel vuoto NON ci sono correnti stazionarie

→ Dall'equazioni di Maxwell che coinvolgono il rotore si ricava che $\vec{E} \perp \vec{B}$ e che $E = cB$.

moduli dei campi

Il prodotto $\vec{E} \times \vec{B}$ definisce il verso di propagazione

∴

Consideriamo un'onda em che si propaga lungo x; le soluzioni ($\neq 0$) dell'eq.ne d'onda sono:

$$\vec{E} = E_y(x-vt)\hat{u}_y + E_z(x-vt)\hat{u}_z$$

$$\vec{B} = B_y(x-vt)\hat{u}_y + B_z(x-vt)\hat{u}_z$$

(Componente lungo x abbiamo visto essere nulla)

Dalla legge locale di Faraday-Lenz, per la componente y del rotore abbiamo:

$\rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial B/\partial t$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{E})_y = \partial_z E_x - \partial_x E_z = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \Rightarrow \partial_x E_z \overset{(*)}{=} \partial_t B_y$$

$\partial_z E_x = 0$ in qto onda trasversale lungo x quindi costante nel piano yz

detta $u = x - vt$ $\quad \partial_x u = 1$ & $\partial_t u = -v$

$$\partial_x E_z = \frac{\partial E_z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial u} \overset{(*)}{=} \partial_t B_y \quad \& \quad \partial_t E_z = \frac{\partial E_z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial u}(-v) \Rightarrow \partial_u E_z = -\frac{\partial_t E_z}{v}$$

$$\partial_x E_z = -\frac{1}{v}\partial_t E_z$$

Integrando (*) in dt:

$$B_y = \int \partial_t B_y\, dt = \int \partial_x E_z\, dt = -\frac{1}{v}\int \partial_t E_z\, dt = -\frac{E_z}{v} + \text{costante}$$

Possiamo porla a $\emptyset$ in quanto legata a soluzioni stazionarie

Abbiamo in definitiva:

$$B_y(x-vt) = -\frac{1}{v} E_z(x-vt)$$

analogamente partendo da componente z di $(\nabla \times E_z)$:

$$\Downarrow$$

$$B_z(x-vt) = +\frac{1}{v} E_y(x-vt) \qquad \partial_t B_z = -\partial_x E_y$$

$\Rightarrow$ Ovvero le componenti dei campi $\vec{E}$ & $\vec{B}$ NON sono indipendenti:

a) $\vec{E} = E_y(x-vt)\hat{u}_y + E_z(x-vt)\hat{u}_z$

b) $\cancel{v}\vec{B} = -\frac{E_z}{v}(x-vt)\hat{u}_y + \frac{E_y}{v}(x-vt)\hat{u}_z$

$\Rightarrow$ da b) ricaviamo la relazione tra i moduli

$$B^2 = B_y^2 + B_z^2 = \frac{1}{v^2}\left(E_z^2 + E_y^2\right) = \frac{1}{v^2} E^2$$

$$\Downarrow$$

$$E = vB = \frac{B}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

$\Rightarrow$ il prodotto scalare tra i campi $\vec{E}$ & $\vec{B}$:

$$\vec{E}\cdot\vec{B} = E_y B_y + E_z B_z = \frac{1}{v}\left(-E_y E_z + E_z E_y\right) = 0$$

N.B. prodotto scalare e' identicamente nullo se i vettori sono $\perp$ tra loro

I campi E e B sono ortogonali!

$\Rightarrow$ il prodotto vettoriale:

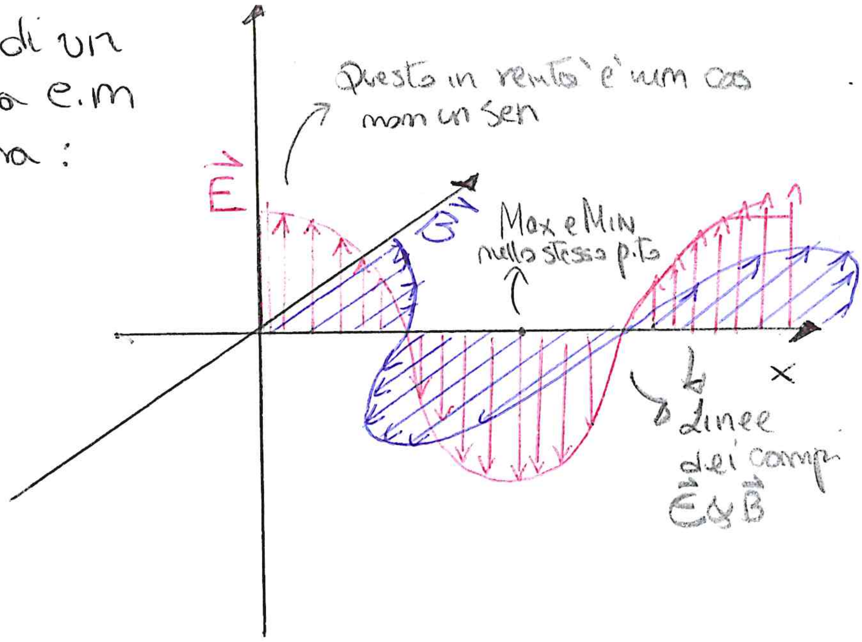
$$\vec{E} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ 0 & E_y & E_z \\ 0 & B_y & B_z \end{vmatrix} = \frac{1}{v}\left(E_y^2 + E_z^2\right)\hat{u}_x =$$

$$= \frac{E^2}{v}\hat{u}_x = \underset{\vec{v}B^2}{\underset{\parallel}{vB^2}}\hat{u}_x = EB\hat{u}_x \Rightarrow$$ da la direzione ed il verso di propagazione!

in quanto $\vec{v} = |\vec{v}|\hat{u}_x$

direzione propagazione

Quindi un onda e.m piana:



- E & B si propagano con la stessa velocità c (nel vuoto)
- I moduli dei campi p.to x p.to, ed istante per istante, sono legati dalla rel.ne $E = cB$

- $\vec{E}$ & $\vec{B}$ sono $\perp$ tra loro e $\perp$ alla direzione di propagazione (onde trasversali, x cui è importante concetto di polarizzazione)
- Il verso di propagazione è quello dato dal prodotto vettoriale $\vec{E} \times \vec{B}$

→ Alcune relazioni utili: (che derivano dalle relazioni viste prima)

$s = vt$

$\lambda = cT \Rightarrow \lambda = \frac{c}{\nu} \Rightarrow$ La lunghezza d'onda e la frequenza non sono indipendenti!

$\Downarrow$

$\frac{2\pi}{k} = c\frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = ck$

- $c = \omega / k$
- $c = \lambda \nu$
- $c = \lambda / T$

} 3 Modi per esprimere la velocità di propagazione

Polarizzazione onde EM:

$\rightarrow \vec{E} = \left(0, E_{oy} \, sen(kx-\omega t), E_{oz} \, sen(kx-\omega t+\delta)\right)$

$\downarrow$

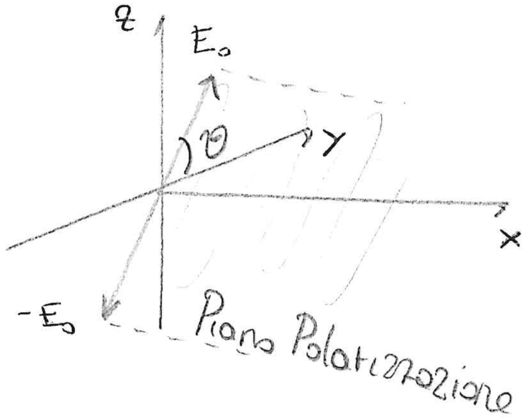
Onda armonica piana (analogo per $\vec{B}$)

$\Rightarrow$ Polarizzazione lineare

$\delta = 0, \pi$ (costante)

$$\vec{E} = \left(0, E_{oy} \, sen(kx-\omega t), \underset{\delta=\pi}{\overset{\delta=0}{\pm}} E_{oz} \, sen(kx-\omega t)\right)$$

$$tg\,\theta = \pm \frac{E_{oz}}{E_{oy}} = costante$$



$$E = \underbrace{\pm E_o}_{\sqrt{E_{yo}^2 + E_{zo}^2}} sen(kx-\omega t)$$

$\Rightarrow$ Polarizzazione Ellittica: $\delta = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$

$$\vec{E} = \left(0, E_{oy} \, sen(kx-\omega t), \pm E_{oz} \cos(kx-\omega t)\right)$$

$\rightarrow$ direzione di $\vec{E}$ ruota, descrivendo un giro completo dopo λ. Nel piano yz, al passare di t, $\vec{E}$ descrive un ellisse di semiassi E_{oy} & E_{oz}

$\Rightarrow$ Se immetto $E_{oy} = E_{oz} \Rightarrow E^2 = \sqrt{E_o^2(\text{sen}^2(kx-\omega t) + \cos^2(kx-\omega t))}$

$= E_o \Rightarrow$ Modulo costante

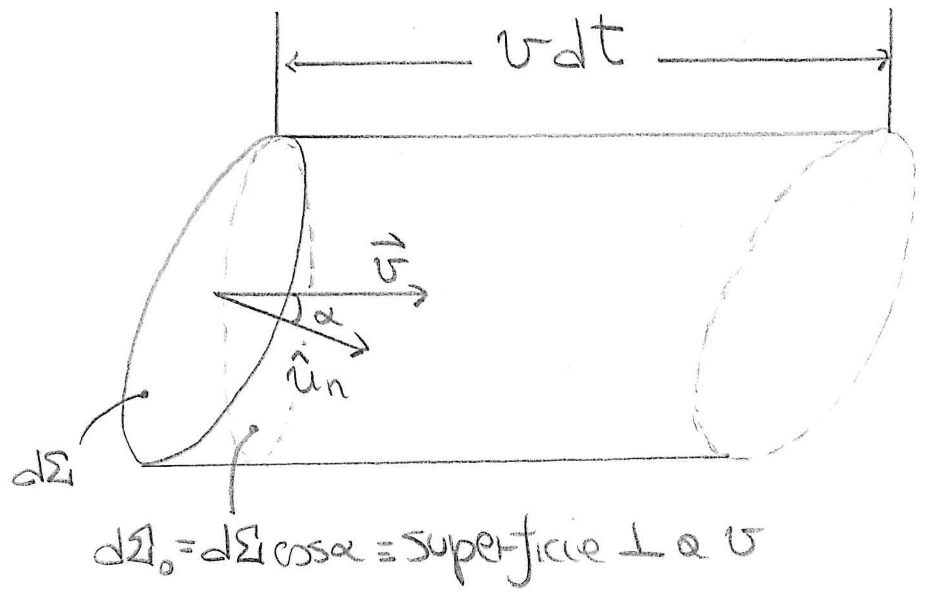
$\swarrow$

Polarizzazione Circolare

$\Rightarrow$ Se la differenza di fase δ varia in maniera CASUALE, non si può stabilire una legge di variazione per la direzione di $\vec{E}$ e $\vec{B}$: lo stato di polarizzazione, pur essendo definito istante per istante, non lo è più in media nel tempo $\Rightarrow$ Si parla quindi di onda NON polarizzata

$\Downarrow$

Onde EM non pol.te sono ad esempio quelle provenienti dal sole o da un lampadina ad incandescenza



(vettore Poynting)