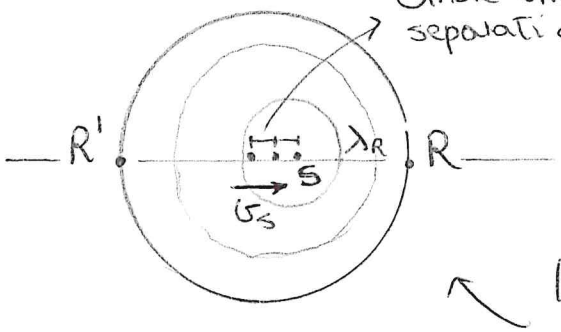
- Effetto Doppler (onde e.m.)

→ Per onde meccaniche è legato al fatto che la velocità di propagazione dipende dal sistema di riferimento; f.e.g. la sorgente è in moto relativo rispetto al ricevitore con velocità $\vec{v}_s$ (minore della velocità di propagazione v)



Onde emesse in 3 istanti separati da T_0
↳ Periodo onda emesso dalla sorgente

di fronti d'onda in Δt ricevuti da R

$$N = \frac{v_s \Delta t}{\lambda_R} \Rightarrow \nu_R = \frac{N}{\Delta t}$$

In R i fronti d'onda sono più vicini di quando la sorgente è ferma:

lunghezza d'onda emessa

$$\lambda_R = \lambda_0 - v_s T_0 = \frac{v}{\nu_0} - \frac{v_s}{\nu_0}$$

$$^{*}\nu_R = \frac{v}{\lambda_R} = \frac{v}{v - v_s}\nu_0$$

Se invece è R a muoversi con velocità v_R, la distanza tra i fronti d'onda rimane λ_0, però il # di fronti d'onda che incontra il ricevitore in Δt è: $N = \underbrace{(v - v_R)}_{\text{velocità onda rispetto a R}}\Delta t / \lambda_0 \Rightarrow \nu_R = \frac{N}{\Delta t} = \frac{v - v_R}{v}\nu_0$

In definitiva:

$$\nu_R = \frac{v - v_R}{v - v_s}\nu_0 \Rightarrow$$

Per un'onda che si propaga in un mezzo l'effetto Doppler non è simmetrico se a muoversi è R o S

→ Per le onde elettromagnetiche il concetto di velocità rispetto al mezzo perde di significato in quanto possono propagarsi nel vuoto. Inoltre, per la relatività ristretta, la velocità delle onde em nel vuoto è sempre c, in qualsiasi sistema di riferimento!

Dunque l'effetto Doppler deve essere SIMMETRICO (ovvero uguale se a muoversi è S o R, l'unica variabile è la velocità relativa tra i due).

Utilizzando le equazioni della relatività ristretta - in cui a trasformarsi da un sistema di riferimento all'altro c'è anche il tempo - si ottiene:

$$\nu_R = \frac{1 \pm \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \nu_0 \quad \& \quad \lambda_R = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 \pm v/c} \lambda_0$$

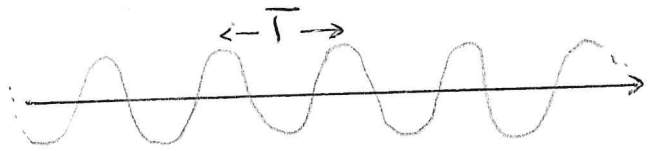
Questo effetto è utilizzato in Astrofisica per studiare la velocità di allontanamento delle galassie, nota λ_0 per elementi chimici in laboratorio:

$$\frac{v}{c} = \frac{\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} + 1\right)^2 - 1}{\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} + 1\right)^2 + 1}$$

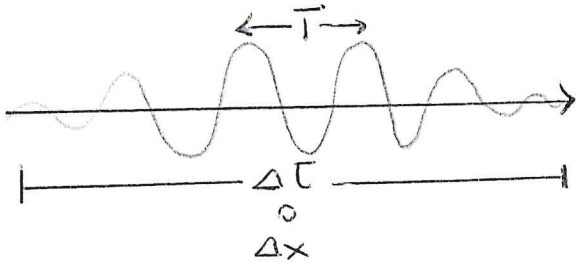
• Pacchetto d'onde

Tutte le sorgenti in genere emettono onde attraverso processi che hanno una durata finita Δt, quindi nella realtà l'onda ha una durata ed un estensione finita.
E.g. la radiazione termica del sole, è dovuta ad un numero enorme di atomi che oscillano con frequenze di 10^{14} Hz. L'emissione del singolo atomo avviene in un tempo dell'ordine di 10^{-8} s, durante il quale viene emesso un impulso di luce, ~~il fotone~~, anche detto pacchetto d'onde:

Onda armonica:



Pacchetto d'onde (Fotone)



con $\Delta x = c\Delta t$

Numero di cicli:

* (altra pagina) $N = \frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{\Delta t}{T}$ => non è fissato

$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \frac{N}{\Delta x}$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \frac{N}{\Delta t}$

Infatti il pacchetto è composto da una banda di frequenze e numeri d'onda, che diventa tanto più stretto, tanto sono maggiori Δx e Δt (per $\to \infty$ abbiamo onda ARMONICO)

* In modo più rigoroso, utilizzando l'analisi di Fourier si dimostra che valgono le disuguaglianze:

$$\Delta k \Delta x \geq 2\pi$$
$$\Delta \omega \Delta t \geq 2\pi$$
$$\Delta \nu \Delta t \geq 1$$

Energia di un onda e vettore di Poynting:

La presenza di un campo $\vec{E}$ ed $\vec{B}$ in una regione di spazio comporta la presenza di una certa quantità di energia con densità u_{em}.

In un mezzo omogeneo per i campi E & B abbiamo

$$u_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \qquad u_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}$$

Quindi la densità di energia em istante per istante

$$u_{em} = u_e + u_m = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} = 2u_e = \varepsilon E^2$$

↳ per un'onda em piana $B^2 = E^2/v^2 = \mu\varepsilon E^2$

Ovvero metà dell'energia em è associata ad E, e metà a B

→ Si consideri l'elemento di superficie $d\Sigma$, la cui normale $\hat{u}_n$ forma un angolo α con la direzione di propagazione definita da $\vec{v}$.
Nel tempo dt passa attraverso $d\Sigma$ l'energia:

$$dU = u \underbrace{\underbrace{d\Sigma \cos\alpha}_{\text{base}} \underbrace{v\,dt}_{\text{altezza}}}_{d\tau = \text{Volume prisma}} = \varepsilon E^2 v \cos\alpha \, d\Sigma \, dt$$

La potenza che attraversa $d\Sigma_i$ in dt è quindi:

$$dP = \frac{dU}{dt} = \varepsilon E^2 v \cos\alpha \, d\Sigma_i = \varepsilon E^2 \vec{v} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma_i$$

Conviene dunque definire il vettore $\vec{S}$:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu} B^2 \vec{v} = \frac{1}{\mu} \underbrace{\frac{E^2}{v^2}}_{\frac{1}{\mu\varepsilon}} \vec{v} = \varepsilon E^2 \vec{v}$$

Vettore di Poynting

Verso e direzione coincidenti con $\vec{v}$ di propagazione

Così da riscrivere la potenza istantanea che attraversa $d\Sigma_i$ come il flusso di $\vec{S}$ attraverso $d\Sigma_i$:

$$dP = \underbrace{\vec{S} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma_i}_{\text{def. flusso}} = S \, d\Sigma_o$$

Sup. ortogonale a v: $d\Sigma_i \cos\alpha$

$$|\vec{S}| = S = \frac{dP}{d\Sigma_o} = v u_{em} \quad \left[\frac{J}{s\,m^2} = \frac{W}{m^2}\right]$$

$\Rightarrow$ il modulo di $\vec{S}$ rappresenta l'energia em che attraversa l'unità di sup. alla propagazione nell'unità di tempo

In genere, dato il grande valore di ω nelle onde em, è rilevante calcolare il flusso medio di energia, a cui si da il nome di INTENSITÀ dell'onda $I = \left(\frac{\overline{dU}}{dt}\right) \frac{1}{d\Sigma_i}$

→ Per un'onda piana polarizzata linearmente

$$\bar{E} = E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

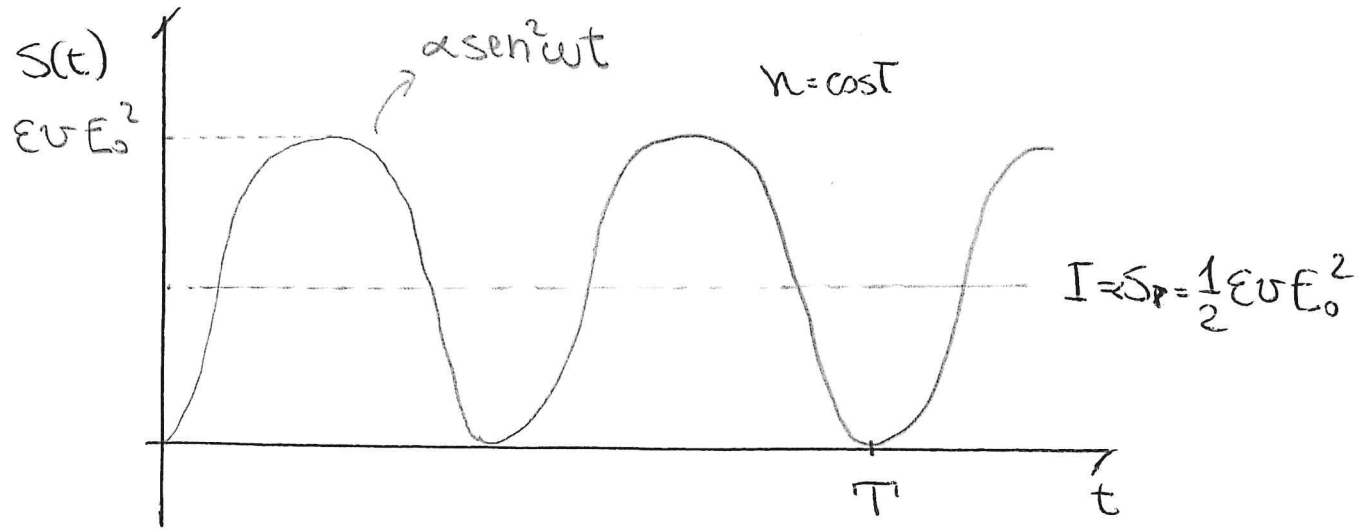
$$\downarrow$$

$$S = \varepsilon E^2 v = \varepsilon v E_0^2 \operatorname{sen}^2(kx - \omega t)$$

il valor medio di S su un intervallo di tempo t vale:

$$I = \langle S \rangle = \varepsilon v \langle E^2 \rangle = \varepsilon v \frac{1}{t} \int_0^t E_0^2 \operatorname{sen}^2(kx - \omega t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon v E_0^2 \Leftarrow$$ intensità onda piana



Onde elettromagnetiche sferiche

→ In genere una sorgente di onde EM emette onde che si propagano in tutte le direzioni

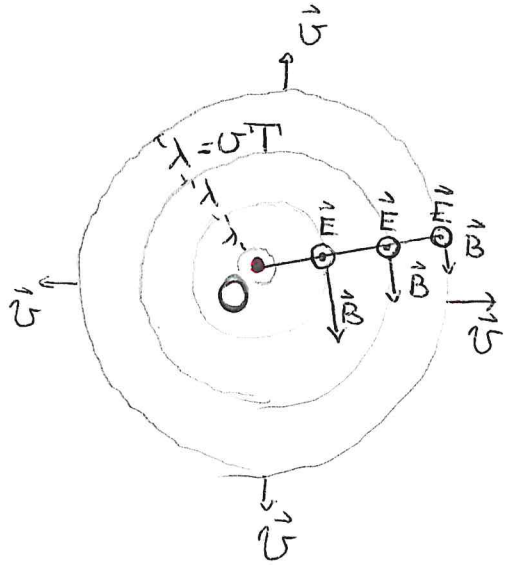
Consideriamo una sorgente puntiforme che emette onde em armoniche in modo ISOTROPICO:

$$E(r,t) = E_0(r)\,\text{sen}(kr-\omega t)$$ → Analogo per $\vec{B}$

DATO CHE ISOTROPICA:

→ la v di propagazione è la stessa in tutte le direzioni

→ l'ampiezza $E_0(r)$ può dipendere solo dalla distanza dalla sorgente, r



→ I fronti d'onda sono sfere sulle quali la fase $kr-\omega t = \text{cost}$, e che compiono in un periodo $T = 2\pi/\omega$ la distanza λ

La potenza media che attraversa una superficie sferica concentrica ad O risulta:

$$\langle P \rangle = I\,\Sigma = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_0^2(r)\, 4\pi r^2 = \text{cost}$$ ⇒ In quanto corrisponde alla <potenza> emessa dalla sorgente

$$\Downarrow$$

$$E_0(r) \propto \frac{1}{r}$$

Avremo quindi:

$$E(r,t) = \frac{E_0}{r} \operatorname{sen}(kr - \omega t)$$

$$B(r,t) = \frac{E_0}{vr} \operatorname{sen}(kr - \omega t)$$

e l'intensità: $I = \frac{1}{2} v \varepsilon \frac{E_0^2}{r^2}$ $\Rightarrow$ diminuisce con il quadrato della distanza dalla sorgente

$$* \quad P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{F}\cdot\vec{s}\right) \overset{F_{cost}\ m\ dt}{\uparrow} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$