

### ESEMPIO: Trasmissione di un sistema di due antenne

Un sistema di  $N = 2$  antenne, ciascuna di potenza  $\rho_1 = 100$  kW (isotropica), distanti  $d = 10$  m una dall'altra, emette onde elettromagnetiche sferiche sincrone di frequenza  $\nu = 3 \cdot 10^7$  Hz. Calcolare le figure d'interferenza prodotte dal sistema alla distanza  $L = 10$  km dal sistema stesso, nel piano delle antenne.

Soluzione: Alla distanza  $L = 10$  km l'intensità di ciascuna antenna è  $I_1 = \rho_1/4\pi L^2 = 7.96 \cdot 10^{-5}$

[W/m<sup>2</sup>], a cui corrisponde l'ampiezza del campo elettrico  $E_1 = \sqrt{2I_1/c\epsilon_0} = 0.245$  V/m e del campo magnetico  $B_1 = E_1/c = 8.17 \cdot 10^{-10}$  T.

La lunghezza d'onda è  $\lambda = c/\nu = 10$  m, uguale a  $d = \lambda$ . Si hanno massimi principali nelle direzioni:

$$\text{sen}\theta = m \rightarrow m = 0 \quad \theta = 0 \quad , \quad m = 1 \quad \theta = \frac{\pi}{2} .$$

In queste direzioni:

$$I_{\text{max}} = 4I_1 = 3.18 \cdot 10^{-4} \text{ W/m}^2 ,$$

$$E_{\text{max}} = 2E_1 = 0.49 \text{ V/m}$$

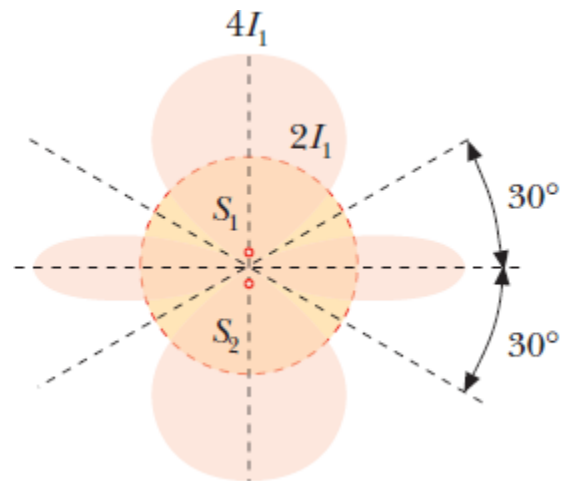
$$B_{\text{max}} = 2B_1 = 1.63 \cdot 10^{-9} \text{ T} ;$$

i minimi d'interferenza si hanno nelle direzioni:

$$\text{sin}\theta = m' + 0.5 \Rightarrow m' = 0, \theta = 30^\circ$$

L'espressione analitica della  $I(\theta)$  è dunque:

$$I_R(\theta) = 4I_1 \cos^2(\pi \text{sen}\theta) .$$



In figura è rappresentato il diagramma polare ottenuto riportando per ogni angolo  $\theta$  (formato con l'asse orizzontale dalla retta che unisce l'origine con il punto in cui si osserva il campo) un punto la cui distanza dal centro è direttamente proporzionale a  $I_R(\theta)$ .

La potenza complessiva emessa dal sistema, che si otterrebbe integrando la  $I_R(\theta)$  su tutto l'angolo solido, risulta  $\rho = 2\rho_1$ , perché l'interferenza agisce solamente sull'intensità variandone la sua forma ma non sulla potenza del sistema, la stessa sia che le sorgenti siano coerenti o incoerenti. Infatti se le sorgenti sono incoerenti l'intensità risulta costante in tutte le direzioni. In figura il diagramma polare nel caso di sorgenti incoerenti è rappresentato da una sfera di raggio  $2I_1$ : l'intensità è costante in tutte le direzioni.

### Interferenza prodotta da N sorgenti di onde coerenti:

Consideriamo N sorgenti eguali di onde cilindriche, coerenti, disposte lungo una retta ed equispaziate di una distanza d. Supponiamo di osservare la loro interferenza ad una distanza molto grande rispetto alla dimensione lineare (N - 1) d del sistema, così da poter utilizzare le stesse approssimazioni introdotte in precedenza. Detto  $\theta$  l'angolo formato tra la direzione di osservazione e la normale alla linea contenente le sorgenti, tra due onde emesse da due sorgenti consecutive esiste la differenza di fase:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta ,$$

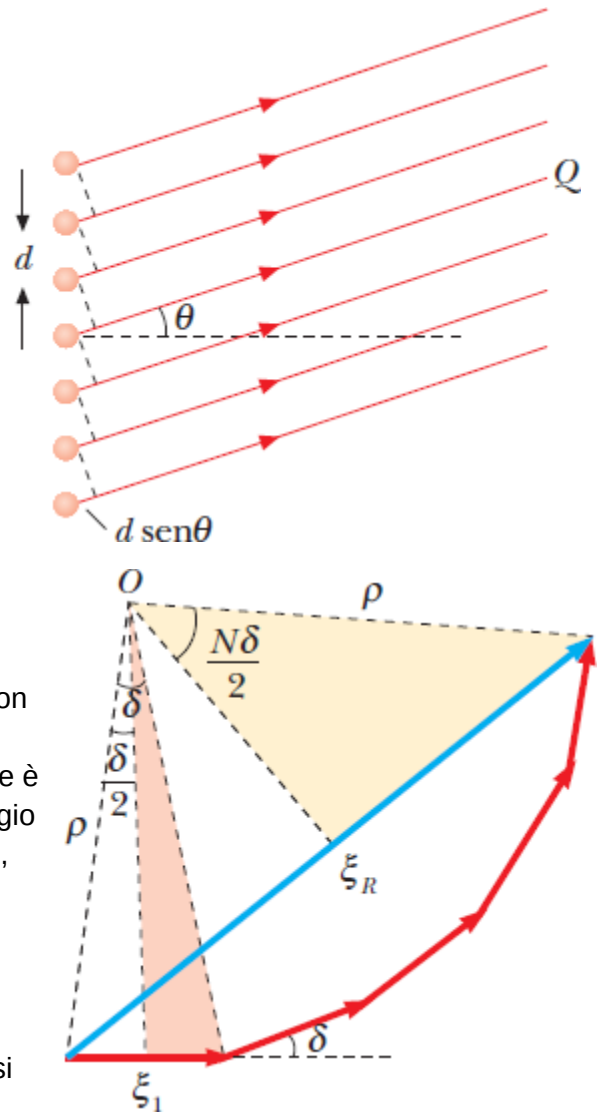
In un punto Q le ampiezze  $\xi_1$  delle singole onde sono eguali, data la lontananza di Q dal sistema di sorgenti; non sono invece eguali le fasi, a causa delle differenze di cammino. Per calcolare l'ampiezza risultante  $\xi_R$  utilizziamo il metodo dei vettori rotanti. Con riferimento alla figura 15.25, le singole ampiezze si dispongono lungo una poligonale regolare di N lati, che è circoscritta con una circonferenza di centro O e raggio  $\rho$ ; l'angolo al centro che sottende il singolo vettore è  $\delta$ , quello che sottende la poligonale è  $N\delta$ . Pertanto:

$$\xi_1 = 2\rho \sin \frac{\delta}{2} , \quad \xi_R = 2\rho \sin \frac{N\delta}{2}$$

e combinando queste relazioni ( $2\rho = \xi_1 / \sin(\delta/2)$ ) si ha il valore dell'ampiezza risultante in funzione dell'ampiezza  $\xi_1$  di ciascuna sorgente e dello sfasamento  $\delta$  tra due onde emesse da sorgenti consecutive:

$$\xi_R = \xi_1 \frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}} .$$

L'intensità dell'onda risultante nel punto Q è proporzionale al quadrato di  $\xi_R$ :



$$I_R(\theta) = I_1 \left( \frac{\frac{\text{sen} \frac{N\delta}{2}}{\frac{\delta}{2}}}{\frac{\text{sen} \frac{\delta}{2}}{\frac{\delta}{2}}} \right)^2 = I_1 \left( \frac{\frac{\text{sen} \frac{N\pi d \text{sen} \theta}{\lambda}}{\frac{\pi d \text{sen} \theta}{\lambda}}}{\frac{\text{sen} \frac{\pi d \text{sen} \theta}{\lambda}}{\frac{\lambda}{\lambda}}} \right)^2 ;$$

IR presenta nell'intervallo  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  un certo numero di massimi principali d'intensità, caratterizzati dalle proprietà:

$$\frac{\pi d \text{sen} \theta}{\lambda} = m\pi \Rightarrow d \text{sen} \theta = m\lambda \quad , \quad \text{sen} \theta = m \frac{\lambda}{d} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$I_{\max} = N^2 I_1 \quad , \quad \xi_{\max} = N \xi_1 \quad .$$

l'intensità in queste condizioni è massima e vale  $I_{\max} = N^2 I_1$ , in quanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} Nx}{\text{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{N \cos Nx}{\cos x} = N \Rightarrow \xi_R = N \xi_1 \quad , \quad I_R = N^2 I_1 \quad .$$

L'intensità  $I_R(\theta)$  si annulla quando si annulla il numeratore, ma non il denominatore:  $N\pi d \text{sen} \theta / \lambda = m'\pi$ , ovvero:

$$\frac{N\pi d \text{sen} \theta}{\lambda} = m'\pi \Rightarrow d \text{sen} \theta = m' \frac{\lambda}{N} \quad , \quad \text{sen} \theta = m' \frac{\lambda}{Nd}$$

$$m' = 1, 2, \dots, N-1, N+1, \dots, 2N-1, 2N+1, \dots \quad ,$$

doendosi escludere i valori 0, N, 2N, ... per i quali si hanno i massimi principali. Tra due massimi principali si hanno dunque N - 1 minimi nei quali  $I = 0$ .

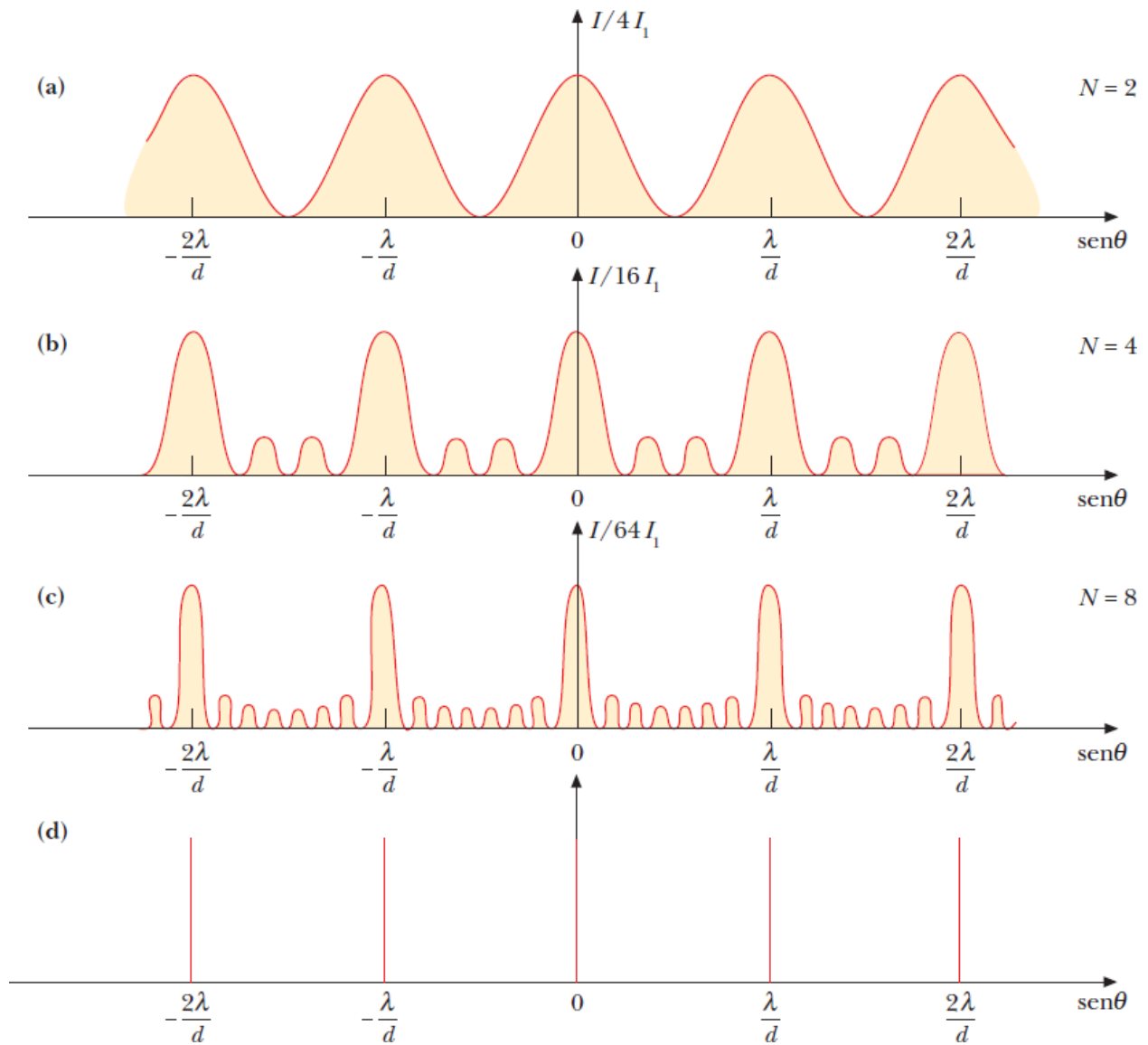
Essendo l'intensità una funzione di  $\theta$  sempre positiva, tra due minimi deve esistere un massimo, detto secondario, e di conseguenza tra due massimi principali ci sono N - 2 massimi secondari. Le posizioni dei massimi secondari si ottengono quando il numeratore vale 1 ovvero in corrispondenza a:

$$\frac{N\pi d \text{sen} \theta}{\lambda} = (2m'' + 1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow d \text{sen} \theta = (2m'' + 1) \frac{\lambda}{2N} \quad ,$$

$$\text{sen} \theta = (2m'' + 1) \frac{\lambda}{2Nd} \quad m'' = 1, 2, \dots, N-2, N+1, \dots, 2N-2, 2N+1, \dots$$

Il valore dell'intensità dei massimi secondari è:

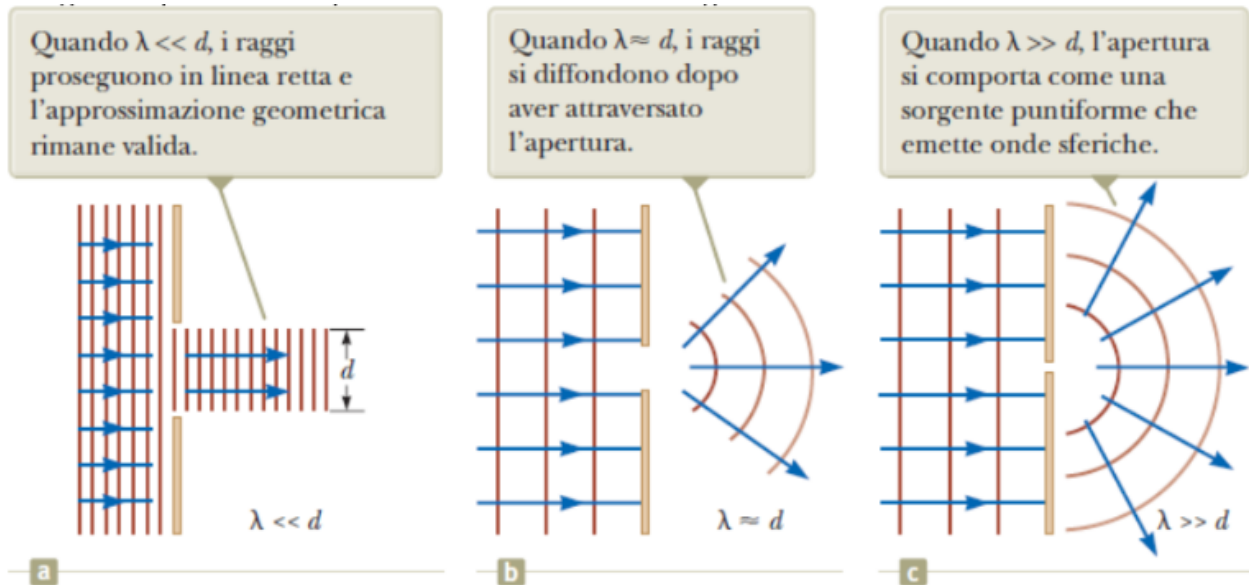
$$I_m = \frac{I_1}{\left[ \text{sen} \frac{(2m'' + 1)\pi}{2N} \right]^2} = \frac{I_{\max}}{N^2 \left[ \text{sen} \frac{(2m'' + 1)\pi}{2N} \right]^2} \quad .$$



1. la direzione dei massimi principali, verso la quale è concentrata la maggior parte della potenza emessa, è determinata dal rapporto  $\lambda / d$  e non dipende dal numero  $N$  di sorgenti. Il numero di massimi principali è dato dal più grande dei valori di  $m$  per il quale  $\text{sen}\theta = m\lambda/d$  non supera l'unità e non dipende da  $N$ ;
2. l'intensità dei massimi principali dipende dal numero  $N$  delle sorgenti e cresce con questo secondo  $I_{\text{max}} = N^2 I_1$ ;
3. l'ampiezza angolare dei massimi principali diminuisce all'aumentare di  $N$ ;
4. gli  $N - 1$  minimi e gli  $N - 2$  massimi secondari compresi tra due massimi principali sono equispaziati nella variabile  $\text{sen}\theta$ : l'intervallo tra un minimo e un massimo secondario è  $\lambda/2 Nd$ , l'intervallo tra due estremi consecutivi dello stesso tipo è  $\lambda / Nd$ . L'intensità dei massimi secondari decresce come  $1/N^2$  all'aumentare di  $N$ : in pratica per  $N$  abbastanza grande si ha intensità solo nei massimi principali. Inoltre, l'intensità dei massimi secondari varia col numero d'ordine  $m$  del massimo.

### Diffrazione:

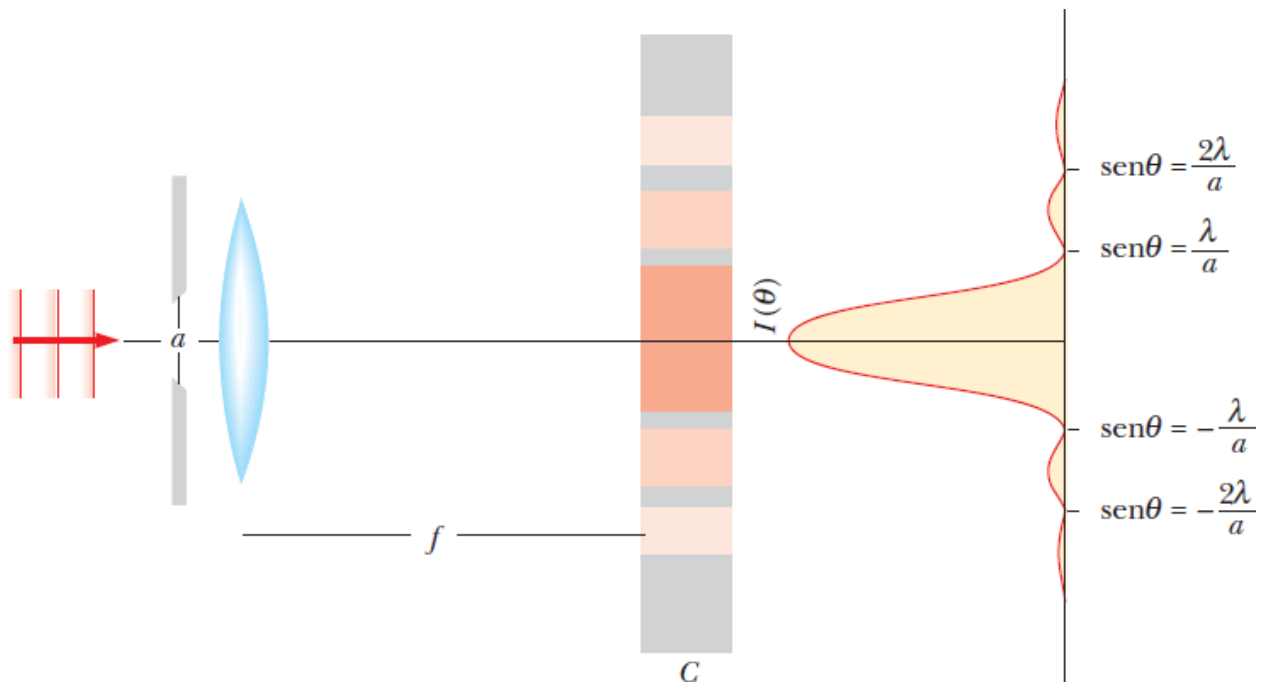
Il fenomeno della diffrazione si ha quando un'onda attraversa una fenditura di dimensioni paragonabili alla sua lunghezza d'onda. In questo caso l'onda devia dalla propagazione rettilinea e si diffonde in più direzioni. Il fenomeno è tanto più evidente tanto minore è l'apertura della fenditura rispetto alla lunghezza d'onda



Qualitativamente, nello spazio oltre l'ostacolo o l'apertura le onde si propagano anche lungo direzioni diverse da quella di incidenza e hanno origine differenze di cammino tra onde che si sovrappongono in un dato punto; possono quindi avvenire fenomeni di interferenza con conseguente redistribuzione dell'energia nei punti dello spazio, da cui risultano le caratteristiche figure di diffrazione. I fenomeni di diffrazione si verificano con tutti i tipi di onde; essi si osservano facilmente nel caso delle onde sulla superficie di un liquido e delle onde sonore, aventi lunghezze d'onda prossime alle dimensioni di molti oggetti comuni. Più difficile è l'osservazione nel caso delle onde luminose, proprio a causa della piccola lunghezza d'onda ( $\lambda = 0.4 \div 0.7 \text{ }\mu\text{m}$ );

### Diffrazione ad una fenditura rettilinea:

Consideriamo una situazione comune, in cui la luce passa attraverso una stretta apertura, assimilabile a una fenditura, ed è proiettata su uno schermo. Come modello semplificato assumiamo che lo schermo di osservazione sia lontano dalla fenditura, cosicché i raggi che raggiungono lo schermo siano approssimativamente paralleli. In questo modello, la figura sullo schermo si chiama figura di diffrazione di Fraunhofer. Nella figura la fenditura si sviluppa ortogonalmente al disegno.

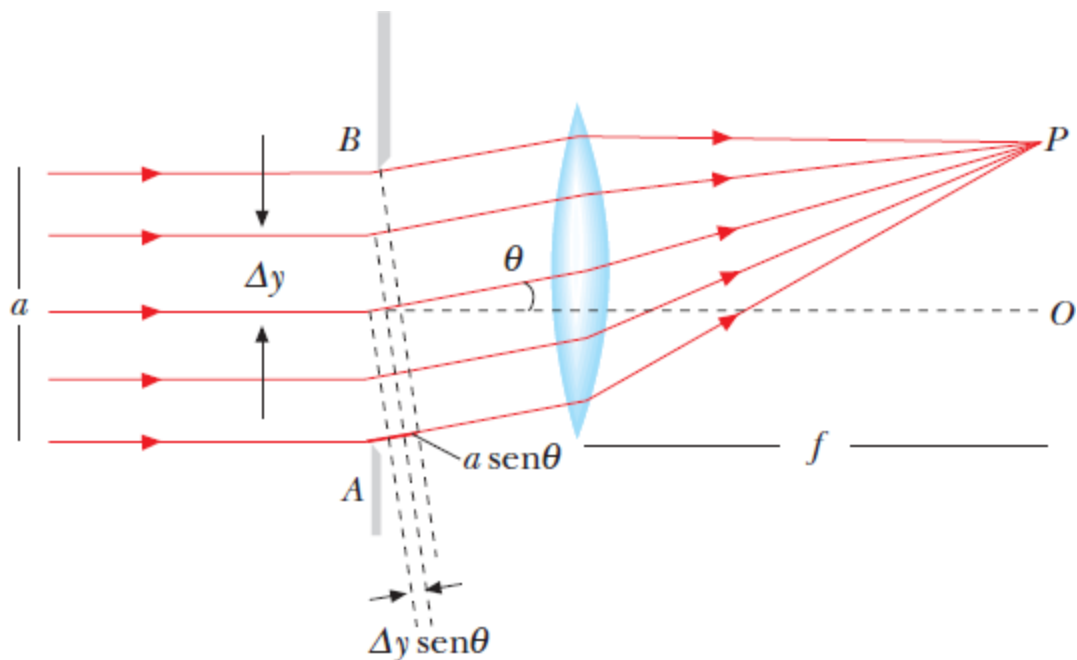


Tale fenditura è illuminata da un'onda piana di lunghezza d'onda  $\lambda$ , con il fronte d'onda parallelo al piano contenente la fenditura. La figura di diffrazione di Fraunhofer è osservata su uno schermo  $C$ , posto nel piano focale di una lente convergente. Essa consta di una frangia chiara centrale e di frange chiare laterali con intensità rapidamente decrescente allontanandosi dal centro, intervallate da frange scure. Diminuendo la larghezza  $a$  della fenditura la frangia centrale si allarga, ovvero il sistema di frange si dilata.

Per spiegare il fenomeno osservato, e con riferimento alla figura sottostante, suddividiamo la fenditura in  $N$  strisce, ciascuna di larghezza  $\Delta\lambda = a/N$ . In base al principio di Huygens-Fresnel-Kirchhoff(\*), ciascuna striscia funge da sorgente di onde secondarie e contribuisce con ampiezza  $\Delta E$  al campo elettrico risultante  $E_p$  in un punto  $P$  dello schermo individuato dai raggi uscenti ad angolo  $\theta$  rispetto alla normale al piano della fenditura. I contributi  $\Delta E$  relativi a due strisce adiacenti hanno nel punto  $P$  la differenza di fase:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta y \sin\theta ,$$

derivante dalla differenza di cammino  $\Delta y \sin\theta$ .



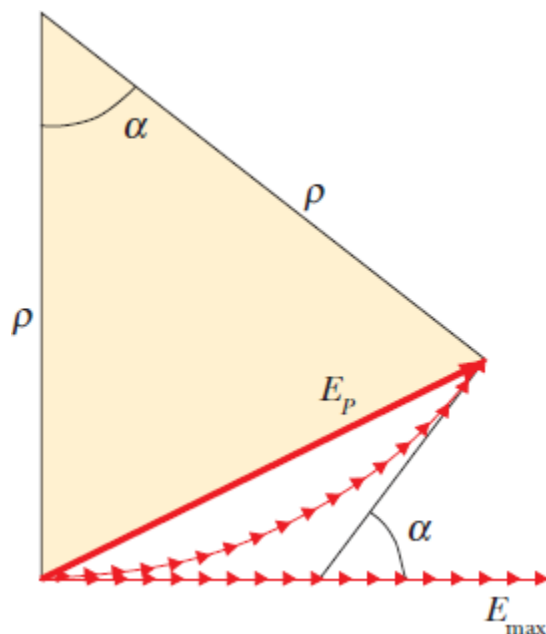
Per il calcolo dell'ampiezza del campo elettrico risultante  $E_p$  si utilizza il metodo dei fasori. Con riferimento alla figura a lato, gli  $N$  fasori che rappresentano i contributi delle singole sorgenti secondarie, in cui si è suddivisa la fenditura, costituiscono una poligonale regolare di  $N$  lati; l'angolo formato tra ciascun fasore e il successivo è  $\Delta\phi$ . La differenza di fase tra l'onda emessa dall'estremo B e l'estremo A della fenditura è:

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta ,$$

pari all'angolo tra il primo fasore e l'ennesimo. Si passa al limite facendo tendere  $\Delta y$  a zero e  $N$  all'infinito: la poligonale diventa un arco di circonferenza di raggio  $\rho$  con angolo al centro pari a  $\alpha$ . Dalla figura risulta che l'ampiezza del campo elettrico risultante  $E_p$ , pari alla corda che sottende l'arco, è:

$$E_p = 2 \rho \sin \frac{\alpha}{2} = 2 \frac{E_{\max}}{\alpha} \sin \frac{\alpha}{2}$$

Dove  $E_{\max} = \rho\alpha$  è la lunghezza dell'arco di circonferenza, e corrisponde all'ampiezza massima che si osserva al centro dello schermo, quando  $\theta = 0$  e tutte le onde emesse dalle singole strisce sono in fase. L'intensità è proporzionale al quadrato dell'ampiezza:



$$I(\theta) = I_{\max} \left[ \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \right]^2 = I_{\max} \left[ \frac{\sin \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}}{\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}} \right]^2.$$

La funzione  $I(\theta)$  è mostrata in figura a lato per i valori  $a = 10\lambda$ ,  $a = 5\lambda$ ,  $a = \lambda$ .

L'intensità trasmessa dalla fenditura si annulla nei cosiddetti minimi di diffrazione, quando:

$$\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} = m\pi \quad , \quad \sin \theta = m \frac{\lambda}{a} \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

I primi minimi, a destra e a sinistra del massimo centrale, si hanno per  $\sin \theta = \pm \lambda / a$  e la quantità  $\Delta(\sin \theta) = 2 \lambda / a$  si chiama larghezza "angolare" del massimo centrale di diffrazione. Si vede che per  $a \gg \lambda$  il massimo è molto stretto e l'effetto della diffrazione è quasi trascurabile, ma che il massimo si allarga se  $a$  diminuisce tendendo a  $\lambda$ . Se fosse  $a = \lambda$  il primo ed unico minimo si formerebbe a  $\theta = 90^\circ$  e con  $a < \lambda$  l'intensità non si annullerebbe mai: cioè con  $a \leq \lambda$  tutto lo spazio al di là della fenditura è illuminato. Tra due minimi d'intensità esiste un massimo secondario, la cui posizione si calcola cercando i massimi della funzione  $(\sin^2 \beta) / \beta^2$ , che rappresenta l'andamento dell'intensità. Con buona approssimazione questi si trovano nei massimi di  $\sin^2(\pi a \sin \theta / \lambda)$ , ovvero quando:

$$\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} = \pm (2m' + 1) \frac{\pi}{2} \quad , \quad \sin \theta = \pm (2m' + 1) \frac{\lambda}{2a} \quad m' = 1, 2, 3, \dots$$

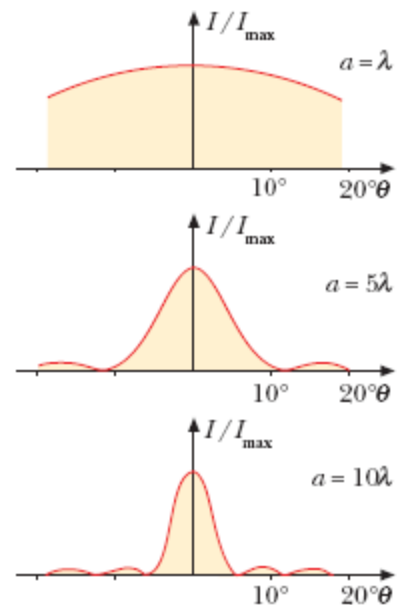
L'intensità dei massimi secondari risulta pertanto:

$$\frac{I_{m'}}{I_{\max}} = \frac{1}{\left[ (2m' + 1) \frac{\pi}{2} \right]^2} \approx \frac{0.4}{(2m' + 1)^2}.$$

Già nel primo massimo  $m' = 1$ ,  $I_1/I_{\max} = 0.045$ , ovvero l'intensità è il 4.5% rispetto al massimo principale; per  $m' = 2$ ,  $I_1/I_{\max} \approx 0.016$ , per  $m' = 3$ ,  $I_1/I_{\max} \approx 0.008$ .

Si dimostra che la maggior parte della potenza (~80%) è concentrata nella frangia centrale, per cui si dice che questa rappresenta l'immagine della fenditura. La larghezza angolare dell'immagine nelle condizioni quasi sempre verificate ( $\lambda \ll a$ ) diviene:

$$\Delta \theta = \frac{2\lambda}{a}.$$





Quando l'apertura attraverso cui facciamo passare l'onda piana incidente è circolare la figura di diffrazione, per ragioni di simmetria, consta di un disco luminoso centrale circondato da una serie di corone circolari alternativamente scure e chiare. Queste frange, osservate in condizioni di Fraunhofer, presentano molte analogie con quanto visto nel caso dell'apertura rettilinea. Si trova in particolare che l'angolo a cui cade il primo minimo di intensità, corrispondente al bordo del disco centrale della figura di diffrazione è dato da:

$$\sin\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} = 0.61 \frac{\lambda}{R} ,$$

se D e R sono rispettivamente il diametro e il raggio dell'apertura circolare. Questa formula va confrontata con la (14.5) che dà, per una fenditura rettilinea larga  $\alpha$ ,  $\sin\theta = \lambda/\alpha$  come direzione lungo cui si ha il primo minimo.

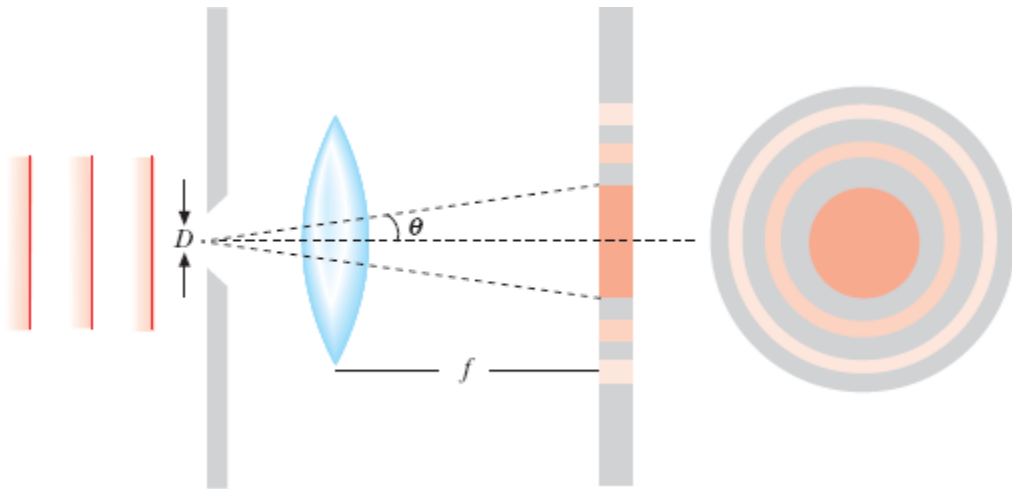
In molte applicazioni, e in particolare per le onde luminose,  $\lambda \ll D$  e si può scrivere

$$\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} = 0.61 \frac{\lambda}{R} ;$$

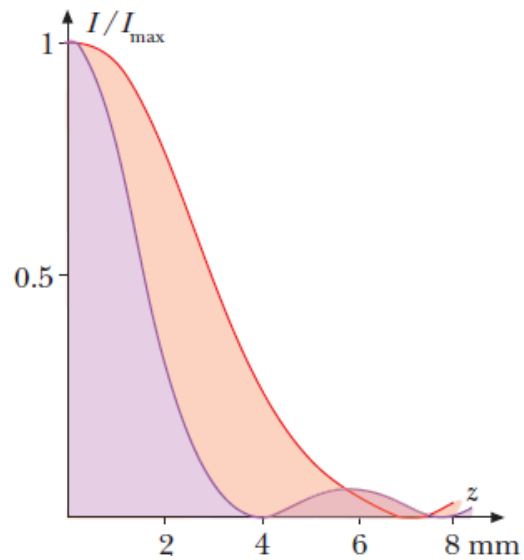
$2\theta$  è la larghezza angolare del massimo centrale.

Anche ora si verifica che oltre l'80% dell'energia trasmessa dall'apertura è concentrata nel disco centrale luminoso, per cui gli anelli chiari concentrici al massimo centrale non sono ben visibili.

Si può dire che il disco centrale, il cui bordo è visto dal centro del foro sotto l'angolo  $2\theta$ , rappresenta l'immagine del foro stesso.



Nota: la dipendenza da  $\lambda$  della posizione dei massimi/minimi fa sì che, se la luce incidente non è monocromatica, la figura di diffrazione formata dalle diverse lunghezze d'onda non sia uguale. In particolare, mentre al centro dell'immagine,  $\theta = 0$ , si realizza la condizione di massimo d'interferenza indipendentemente da  $\lambda$ , lunghezze d'onda maggiori hanno i minimi e massimi secondari ad una distanza angolare maggiore dal centro



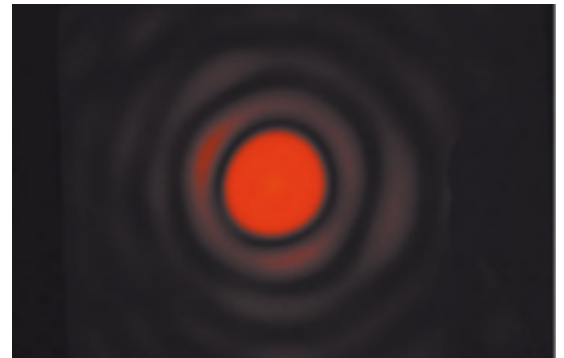
### Risoluzione angolare:

La capacità di sistemi ottici di distinguere tra oggetti vicini fra loro è limitata dalla natura ondulatoria della luce.

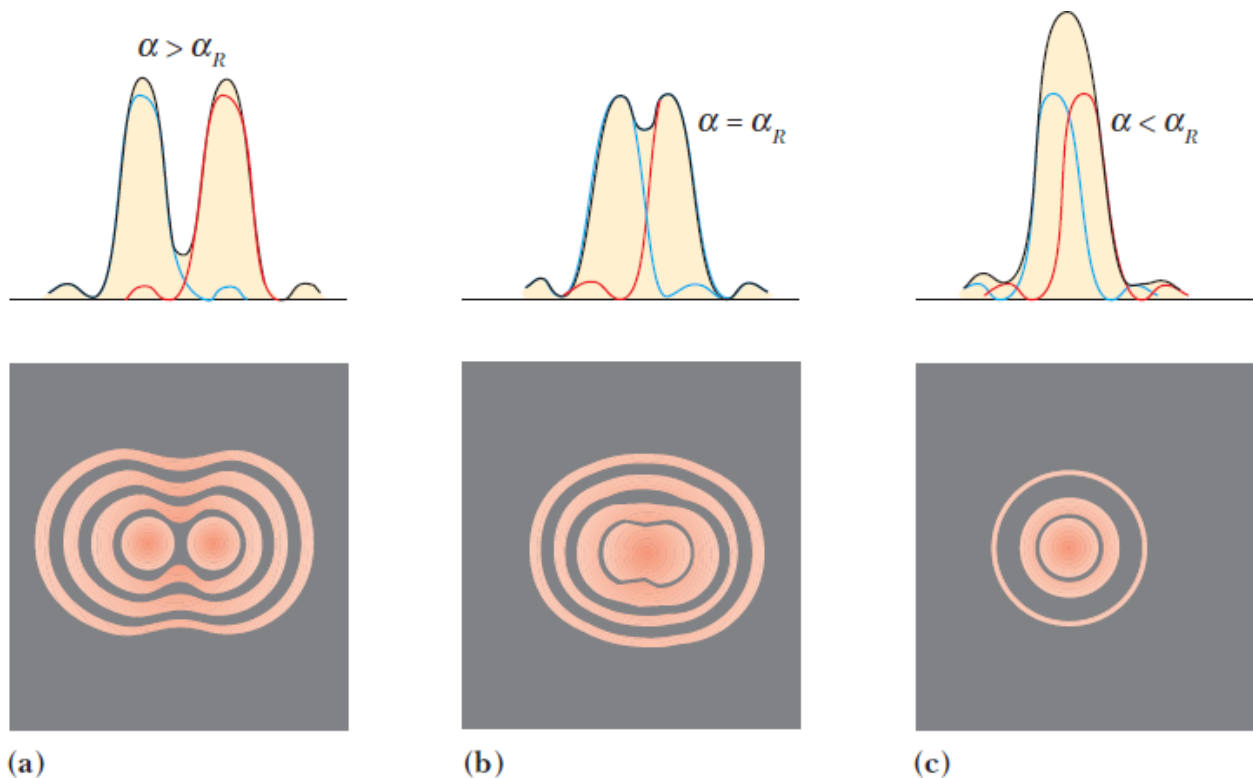
Si consideri ora la diffrazione prodotta da un foro circolare, come una lente convergente, attraverso cui passa la luce.

La figura mostra l'immagine che forma un laser puntato su un'apertura circolare di piccolissimo diametro.

Quest'immagine non è un punto, come risulterebbe da un'analisi condotta secondo le approssimazioni dell'ottica geometrica, ma un disco circolare circondato da anelli secondari di intensità via via minore. Si tratta, anche in questo caso, di un fenomeno di diffrazione.



Il fatto che le immagini delle lenti siano figure di diffrazione è importante quando si voglia risolvere, ossia distinguere, due oggetti puntiformi lontani la cui distanza angolare è piccola. Se le due sorgenti sono separate in modo tale che i loro massimi centrali non si sovrappongano, le loro immagini possono essere distinte e si dice che le due sorgenti sono risolte. Però, se le sorgenti sono vicine l'una all'altra, i due massimi centrali possono sovrapporsi e le sorgenti non sono risolte.



Per decidere quando due immagini sono risolte, si usa spesso il seguente criterio:

Si dice che le immagini sono appena risolte quando il massimo centrale della figura di diffrazione di una sorgente cade sul primo minimo della figura di diffrazione dell'altra sorgente.

Questa condizione limite per la risoluzione è nota come criterio di Rayleigh.

La Figura mostra le figure di diffrazione da aperture circolari per tre situazioni. Quando gli oggetti sono distanti tra loro, le loro immagini sono ben risolte (Fig. a). Le sorgenti sono appena risolte quando la loro separazione angolare soddisfa il criterio di Rayleigh (Fig. b). Infine, in Figura c le sorgenti sono non risolte.

Usando il criterio di Rayleigh, possiamo determinare la minima separazione angolare  $\theta_{\min}$ , sottesa dalle sorgenti rispetto alla fenditura (angolo visivo), tale che siano appena risolte. Un'analisi completa mostra che l'angolo limite di risoluzione per l'apertura circolare è:

$$\theta_{\min} = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

dove  $D$  è il diametro dell'apertura. Questa equazione è correlata alla difficoltà che abbiamo ad esempio nel vedere due fari distanti come distinti. Quando osserviamo con l'occhio,  $D$  nell'Equazione è il diametro della pupilla (circa 2mm). La figura di diffrazione che si forma quando la luce passa attraverso la pupilla causa la difficoltà nel risolvere i fari. Sempre secondo la stessa formula risulta chiaro in un telescopio, per aumentarne il potere risolutivo, è necessario aumentare il diametro della lente

### **Potere separatore dell'occhio umano, acuità visiva**

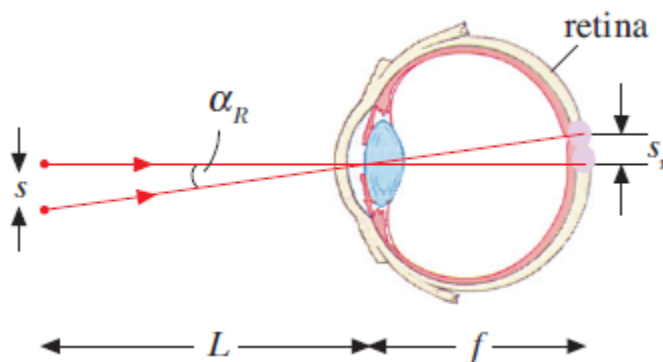
Il diametro della pupilla dell'occhio umano, paragrafo E14.2, varia all'incirca tra i limiti  $D = 8 \text{ mm}$  e  $D = 2 \text{ mm}$ ; con luce di lunghezza d'onda  $\lambda_0 = 0.55 \cdot 10^{-6} \text{ m}$  si ha da (16.15)

$$0.84 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \leq 3.36 \cdot 10^{-4} \text{ rad}.$$

Nel caso più sfavorevole,  $D = 2 \text{ mm}$ , la minima distanza tra due punti ancora distinguibili dall'occhio, posti alla distanza  $L = 25 \text{ cm}$  detta di visione distinta, è

$$s = L\alpha_R = 250 \cdot 3.36 \cdot 10^{-4} = 84 \mu\text{m}.$$

Con  $D = 8 \text{ mm}$  si troverebbe  $s = 21 \text{ pm}$ .

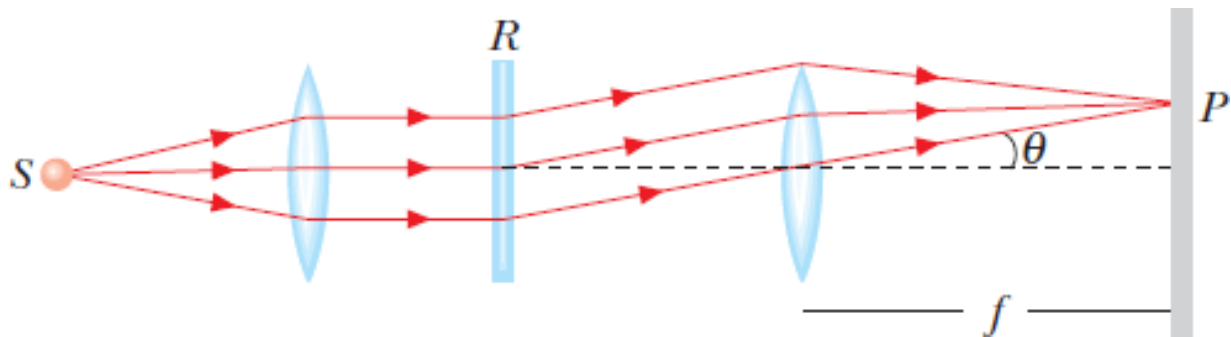


Sperimentalmente l'angolo minimo risolvibile dall'occhio umano è più vicino a  $3 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$  (corrispondente a  $\sim 100 \mu\text{m}$  a  $25 \text{ cm}$ ), per cui non è la diffrazione che lo limita. Esso dipende

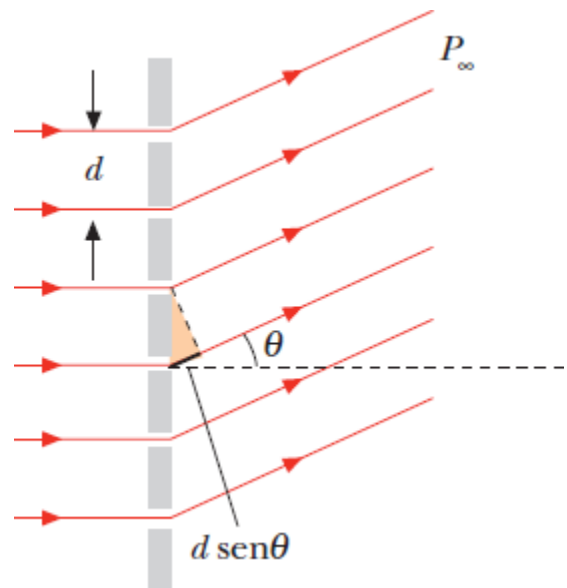
invece dalla struttura “granulosa” del sistema che regola la formazione dell’immagine. Il sistema di ricezione dei segnali luminosi è situato sulla retina. Gli elementi fotosensibili sono i coni e i bastoncelli, di dimensioni caratteristiche di qualche micrometro. I 120 milioni di bastoncelli a gruppi di cento sono collegati ad un singolo neurone, che viene attivato quando viene colpito uno qualunque dei bastoncelli ad esso collegati; i circa 6 milioni di coni sono collegati singolarmente ad un neurone. Il sistema di circa 7 milioni di neuroni, che nel suo complesso può essere visto come un sistema di 7 milioni di fibre ottiche che trasmette i dati al cervello, costituisce il nervo ottico. Due punti luminosi sono percepiti come distinti quando la luce proveniente da essi attiva due neuroni distinti. Non basta quindi che i dischetti di diffrazione siano appena risolvibili, occorre, nell’occhio, che i dischetti di diffrazione abbiano dimensioni paragonabili con la distanza minima che occorre per attivare neuroni distinti, ed anzi, come succede in pratica, che vengano attivati neuroni non adiacenti. È questo il parametro che limita il potere separatore angolare dell’occhio umano.

### Reticolo di diffrazione:

Un reticolo di diffrazione è un sistema di  $N$  fenditure, ciascuna di larghezza  $\alpha$ , equispaziate di una distanza  $d$ . Esso può essere realizzato tracciando delle incisioni parallele molto sottili su una lastra di vetro, in modo da produrre sottili strisce opache, utilizzando una punta di diamante il cui movimento è comandato da una macchina utensile molto precisa. Lo spazio che rimane tra una incisione e la successiva costituisce una fenditura. La distanza  $d$  tra due fenditure è detta passo del reticolo e la larghezza complessiva è  $L = Nd$ . Il reticolo è uno strumento molto potente per l'analisi della luce emessa da sostanze. Nella figura un'onda piana di lunghezza d'onda  $\lambda$  incide sul reticolo, con incidenza normale; dopo il reticolo si pone una lente convergente e si osserva la figura di interferenza nel piano focale della lente. Il sistema, nel suo complesso, prende il nome di spettroscopio a reticolo di diffrazione.



Fissato un punto  $P$  sullo schermo, individuato dall'angolo  $\theta$ , l'intensità in  $P$  si calcola considerando l'interferenza dovuta a  $N$  sorgenti, in cui l'intensità  $I_1(\theta)$  della singola fenditura è modulata dalla diffrazione. Con riferimento alla Figura a fianco, in cui per esemplificare  $N = 6$ , discutiamo dapprima l'aspetto interferenziale. Se ci poniamo in direzione perpendicolare al reticolo,  $\theta = 0$ , tutte le onde emesse dalle  $N$  fenditure sono in fase. Se  $E_1(0)$  è l'ampiezza del campo elettrico di ciascuna sorgente l'ampiezza risultante è  $E_p(0) = N E_1(0)$ , l'intensità è quindi  $I(0) = N^2 I_1(0)$  ed è massima, Figura. La stessa situazione si presenta per l'angolo  $\theta$  tale che la differenza di fase  $\delta$ , che deriva dalla differenza di percorso  $d \sin\theta$  tra due sorgenti consecutive, è un multiplo intero di  $2\pi$ :



$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta = 2m\pi \quad \sin\theta_m = \frac{m\lambda}{d} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

fissato il rapporto tra lunghezza d'onda e passo del reticolo, le direzioni alle quali risulta massima l'intensità per effetto dell'interferenza. Per  $m = 0$ ,  $\theta = 0$  si ha il massimo centrale, detto massimo di ordine 0; per  $m = \pm 1$  si hanno le posizioni dei due massimi adiacenti al massimo

centrale, detti massimi principali del primo ordine, per  $m = \pm 2$  si hanno i massimi principali del secondo ordine e così via. L'ordine massimo per effetto dell'interferenza risulta fissato dalla condizione:

$$\sin\theta_m \leq 1, \quad m \leq d/\lambda.$$

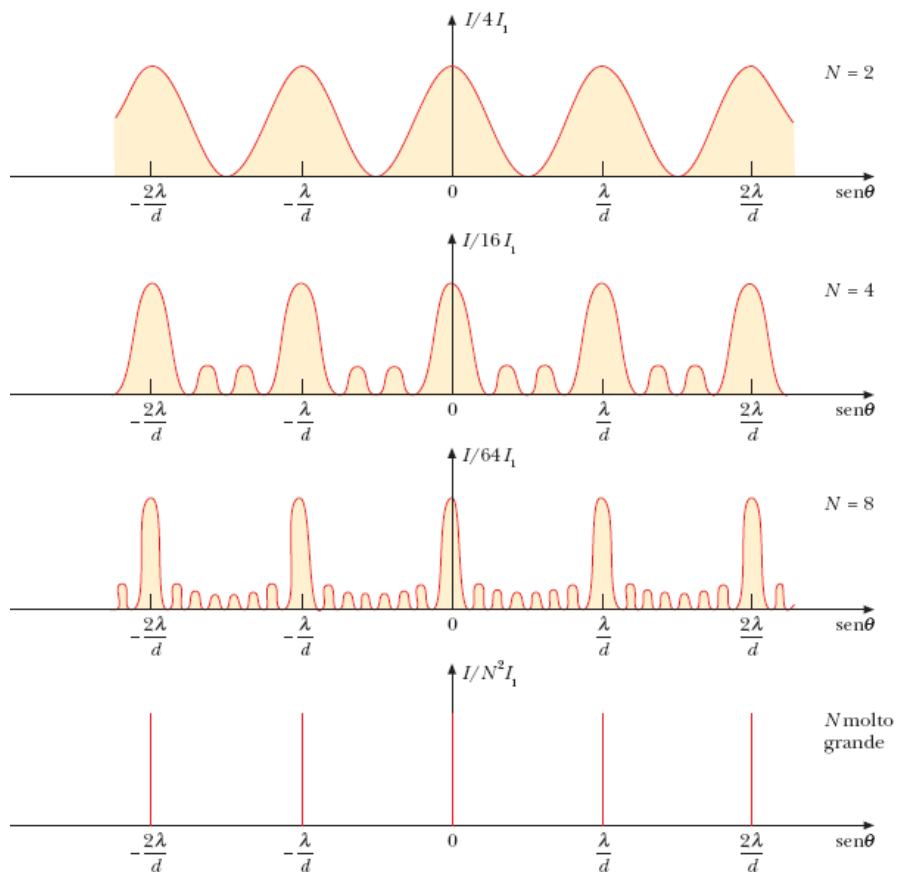
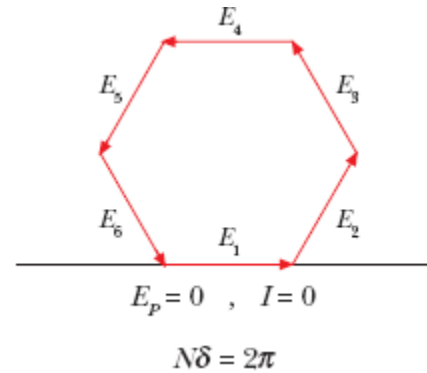
Nell'intorno dei massimi principali l'intensità diminuisce. Se ci poniamo nell'intorno del massimo centrale, quando la differenza di fase, tra la prima e la N-esima sorgente soddisfa alla relazione:

$$N\delta = N \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta = \pm 2\pi, \quad \sin\theta = \pm \frac{\lambda}{Nd} = \pm \frac{\lambda}{L},$$

gli N fasori formano una poligonale chiusa, il campo elettrico risultante è nullo e l'intensità è conseguentemente nulla. La distanza angolare tra un massimo che si forma all'angolo per cui  $\sin\theta_m = m \lambda / d$  e i minimi adiacenti è dunque:

$$\Delta(\sin\theta) = \pm \frac{\lambda}{Nd} = \pm \frac{\lambda}{L}.$$

I risultati di questa trattazione semplificata sono mostrati in Figura, per alcuni valori di N. Sono riportati anche gli N - 2 massimi secondari che si formano tra i massimi principali, di bassa intensità e quindi irrilevanti agli effetti pratici. Si vede molto bene che al crescere di N la larghezza angolare dei primi massimi principali, che come diremo tra breve sono quelli effettivamente visibili, pari a  $\Delta\theta_m \approx 2\lambda/Nd$  in quanto  $\cos\theta_m \approx 1$ , diventa molto piccola rispetto alla distanza tra due massimi principali consecutivi  $\Delta(\sin\theta_m) = \lambda/d$ , che non dipende da N :  $\Delta\theta_m/\Delta(\sin\theta_m) = 2/N$ . Nei comuni reticoli di diffrazione N è in effetti molto grande, i massimi principali sono molto stretti e pertanto sono ben definite le direzioni  $\theta_m$  per cui avviene il massimo della trasmissione da parte del reticolo.



L'effetto della diffrazione è quello di far diminuire l'intensità  $I_1$  di ciascuna fenditura all'aumentare di  $\theta_m$  secondo

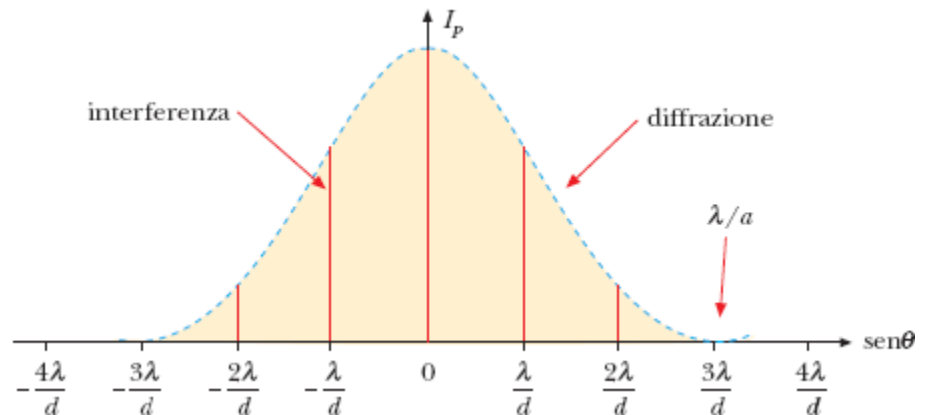
$$I(\theta) = I_{\max} \left[ \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \right]^2 = I_{\max} \left[ \frac{\sin \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}}{\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}} \right]^2.$$

per cui l'intensità del massimo principale di ordine  $m$  sarà ora  $I(m) = N^2 I_1(\theta_m)$ : ovvero l'intensità della figura di interferenza è modulata dalla diffrazione alle singole fenditure. Per fissare l'entità dell'effetto basta osservare che, per il valore di  $\theta_m$  per cui

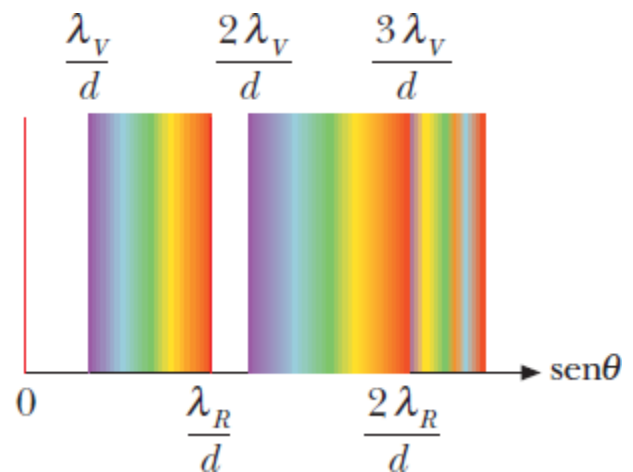
$$\sin \theta_m = m \frac{\lambda}{d} \quad \text{e} \quad \sin \theta_m = \frac{\lambda}{a},$$

Si ha un massimo principale di interferenza, ma anche un minimo nullo di diffrazione, per cui l'intensità in quel punto risulta nulla. La relazione  $m' = d/a$  dà l'ordine del primo massimo principale mancante a causa della diffrazione.

In Figura è rappresentato il caso in cui  $d/a \approx 3$ , per cui manca il massimo principale di ordine 3; quelli degli ordini successivi, sempre per effetto della diffrazione, non sono praticamente visibili.



Se la sorgente che illumina il reticolo non emette luce monocromatica, le differenti lunghezze d'onda che compongono la luce incidente producono massimi principali ad angoli diversi, in quanto la posizione dei massimi dipende dalla lunghezza d'onda; solo il massimo di ordine zero si forma a  $\theta = 0$  per tutte le lunghezze d'onda. Questa dipendenza dell'angolo di formazione dei massimi dalla lunghezza d'onda si chiama dispersione angolare. Fissato un valore dell'ordine  $m$ , l'insieme dei massimi che si formano per le diverse lunghezze d'onda prende il nome di spettro di ordine  $m$ , per cui si ha uno spettro del primo ordine ( $m = 1$ ), uno del secondo ordine ( $m = 2$ ) e così via. Quando l'illuminazione è in luce bianca, nella quale si trovano con continuità tutte le lunghezze d'onda





comprese tra il viola  $\lambda_V = 0.4 \text{ pm}$  e il rosso  $\lambda_R = 0.7 \text{ pm}$ , lo spettro del prim'ordine è l'unico cosiddetto puro, figura 16.28, dato che ad un certo angolo corrisponde un solo colore (questo perché  $\lambda_R < 2\lambda_V$ ). Invece negli spettri di ordine superiore si ha sovrapposizione tra spettri di ordine diverso.

Da quanto detto risulta evidente la capacità del reticolo di diffrazione di analizzare la composizione della luce che lo colpisce, proprietà sfruttata per studiare le caratteristiche della sorgente luminosa. Discutiamo in particolare la possibilità offerta dal reticolo di distinguere due onde luminose con lunghezze d'onda molto vicine, introducendo il concetto di potere risolutivo del reticolo. Per raggiungere lo scopo i massimi principali relativi a queste lunghezze d'onda devono avere larghezza angolare più piccola possibile. Il potere risolutivo si definisce seguendo il criterio di Rayleigh.

Consideriamo due lunghezze d'onda  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , con  $\lambda_2 > \lambda_1$ , e un reticolo di passo  $d$  con  $N$  fenditure; i massimi principali di ordine  $m$  e i minimi ad essi adiacenti si formano agli angoli

$$\begin{aligned} \sin \theta_{m,1} &= m \frac{\lambda_1}{d} \quad , \quad \sin \theta'_{m,1} = m \frac{\lambda_1}{d} \pm \frac{\lambda_1}{Nd} \quad , \\ \sin \theta_{m,2} &= m \frac{\lambda_2}{d} \quad , \quad \sin \theta'_{m,2} = m \frac{\lambda_2}{d} \pm \frac{\lambda_2}{Nd} \quad . \end{aligned}$$

Le due lunghezze d'onda sono appena risolubili, secondo il criterio di Rayleigh, quando il massimo di  $\lambda_1$  coincide con il minimo di  $\lambda_2$ , condizione che si può scrivere in due modi:

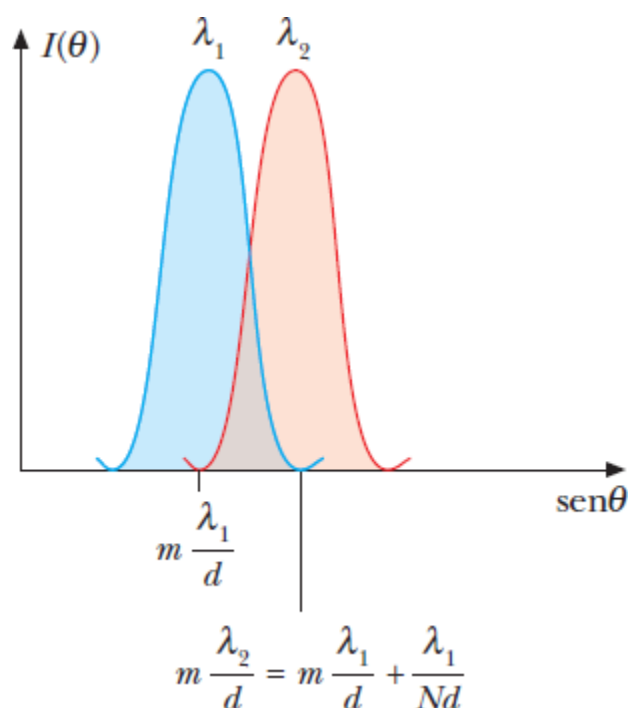
$$m \frac{\lambda_1}{d} = m \frac{\lambda_2}{d} - \frac{\lambda_2}{Nd} \quad , \quad m \frac{\lambda_2}{d} = m \frac{\lambda_1}{d} + \frac{\lambda_1}{Nd} \quad .$$

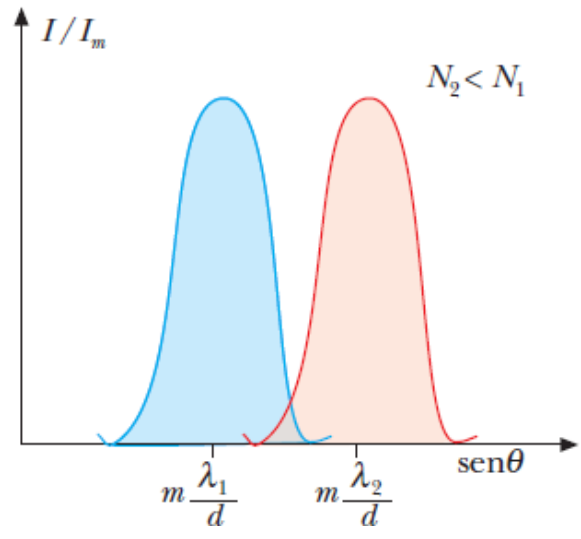
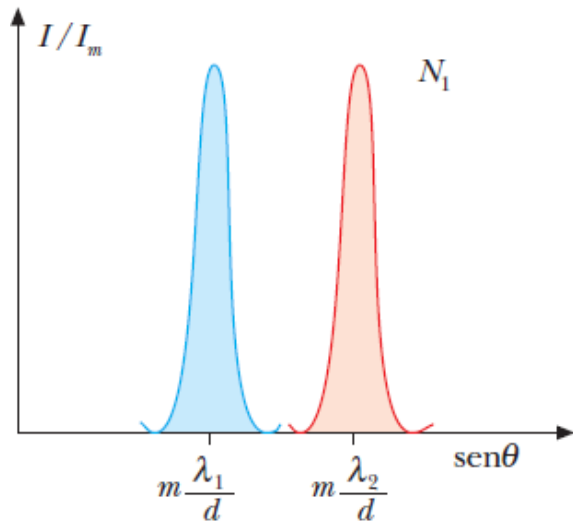
Dato che  $\lambda_1 \approx \lambda_2 \approx \lambda$ , chiamando  $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$  si ha da entrambe:  $m \Delta\lambda = \lambda / N$  e si definisce potere risolutivo del reticolo all'ordine  $m$  la grandezza:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN \quad ,$$

la quale esprime, per una data  $\lambda$ , la differenza  $\Delta\lambda$  risolvibile. Dunque:

- il potere risolutivo del reticolo risulta proporzionale al numero totale di fenditure e aumenta con l'ordine dello spettro utilizzabile;
- il potere risolutivo non dipende dal passo del reticolo.

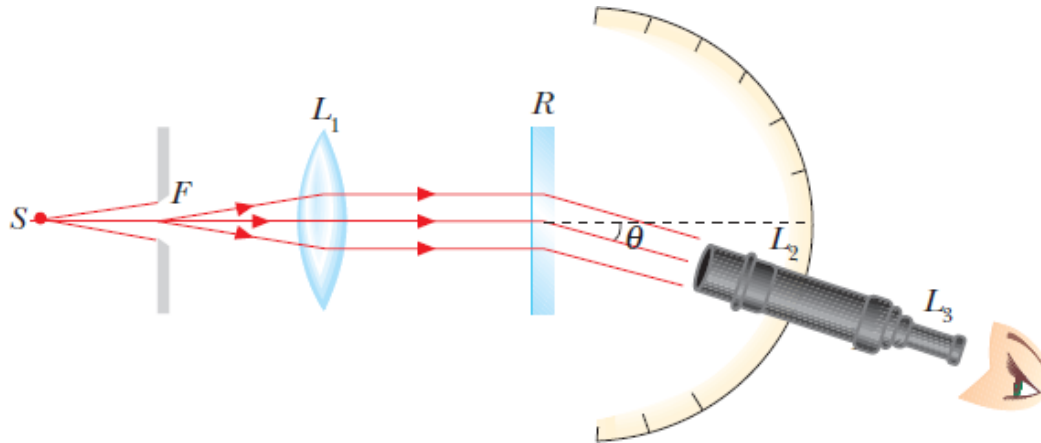




Infatti, anche se la dimensione del passo  $d$  incide sulla separazione angolare dei massimi di due onde con  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  (potere dispersivo  $D = d \vartheta / d \lambda = 1 / d m / \cos(\vartheta_m)$ ), l'estensione delle bande non permette di risolvere i due massimi.

## Spettroscopia:

I reticoli di diffrazione hanno un utilizzo molto importante nell'analisi della radiazione elettromagnetica visibile emessa dalle varie sostanze opportunamente eccitate, analisi che viene chiamata spettroscopia. L'apparecchio usato per la misura delle lunghezze d'onda emesse da una sorgente è mostrato schematicamente in figura; esso costituisce un esempio di spettroscopio a reticolo di diffrazione.



La luce emessa dalla sorgente S passa attraverso una sottile fenditura F posta nel piano focale della lente  $L_1$ ; l'insieme fenditura-lente costituisce il collimatore. Da  $L_1$  emerge un fascio di raggi paralleli che incide ortogonalmente sul reticolo R. I raggi trasmessi dal reticolo secondo una certa direzione  $\theta$  sono focalizzati dal sistema di lenti  $L_2$  e  $L_3$  che costituiscono il telescopio. Muovendo il telescopio non si osserva nulla a meno che esso non sia posizionato secondo una direzione  $\theta$  che soddisfa alla relazione:

$$\sin \theta_\lambda = m \frac{\lambda}{d} .$$

Noto il passo  $d$  del reticolo, misurato l'angolo  $\theta_\lambda$  con un goniometro di precisione e individuato l'ordine  $m$ , si determina il valore della lunghezza d'onda.

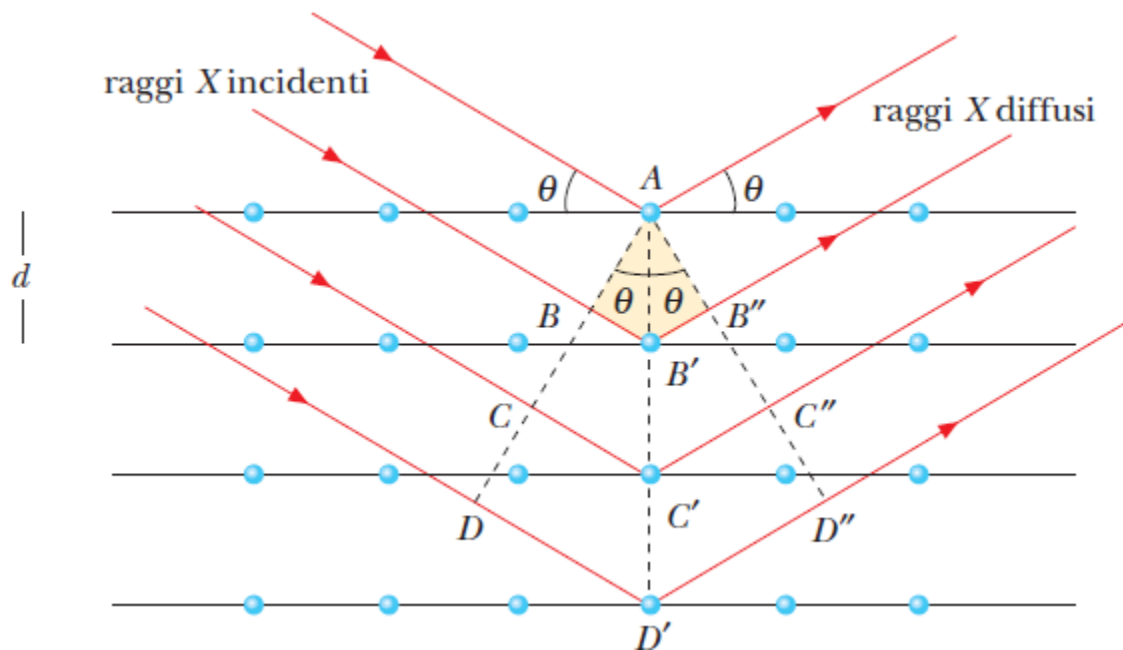
## Diffrazione dei raggi X

I raggi X occupano la banda di radiazioni elettromagnetiche con lunghezze d'onda inferiori a  $10^{-9}$  m; essi vengono prodotti dal frenamento in un materiale pesante di elettroni accelerati da una differenza di potenziale tipicamente compresa tra 10 e 100 kV, oppure quando un elettrone compie una transizione verso uno dei livelli energetici più interni di un atomo.

In un normale reticolo di diffrazione ottico i raggi X non vengono praticamente diffratti; ad esempio, con  $\lambda = 10^{-10}$  m e  $d = 10^{-6}$  m il massimo del prim'ordine si forma all'angolo  $\theta = \lambda/d = 10^{-4}$  rad =  $5.7 \cdot 10^{-3}$  gradi, troppo vicino al massimo di ordine zero per essere osservato. Invece un reticolo spaziale naturale adatto a produrre la diffrazione dei raggi X è un reticolo cristallino, in cui gli atomi sono disposti secondo strutture regolari con distanze reciproche molto piccole confrontabili appunto con la lunghezza d'onda dei raggi X.

Quando un fascio di raggi X di lunghezza d'onda  $\lambda$  incide su questa struttura di atomi, gli elettroni che circondano ogni singolo nucleo si comportano come dipoli oscillanti, emettendo radiazione elettromagnetica di lunghezza d'onda  $\lambda$  in tutte le direzioni. Il cristallo si comporta quindi come un sistema tridimensionale di sorgenti coerenti e nello spazio circostante si osserva l'interferenza delle onde emesse da queste sorgenti.

Un'onda piana, che incide sul cristallo formando l'angolo di radenza  $\theta$  con un insieme di piani reticolari distanti  $d$ , vede la serie di atomi, uno per piano reticolare, che appartengono ad una retta ortogonale ai piani reticolari, come un reticolo unidimensionale,. Se ci poniamo nella direzione di osservazione che forma l'angolo  $\theta$  rispetto ai piani reticolari, le differenze di cammino  $BB'B''$ ,  $CC'C''-BB'B''$ ,  $DD'D''-CC'C''$  tra le onde emesse da due sorgenti contigue come A e B', B' e C', C' e D' sono eguali a  $2d\text{sen}\theta$ .



abbiamo interferenza costruttiva quando:

$$2d \text{sen}\theta = m\lambda \quad , \quad \text{sen}\theta = \frac{m\lambda}{2d} \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

relazione detta legge di Bragg. Per angoli diversi il fascio risulta notevolmente attenuato o addirittura soppresso a causa dell'interferenza distruttiva, proprio come avviene per i reticoli ottici.

Un dispositivo per l'osservazione della diffrazione di raggi X è lo spettrografo a cristallo ideato da Bragg. In corrispondenza di una determinata serie di piani reticolari, cioè ad un certo valore di  $d$ , si varia l'angolo  $\theta$  e misurando gli angoli dei massimi si deduce lo spettro delle lunghezze d'onda del fascio di raggi X emessi dagli elettroni frenati. Si verifica così l'esistenza della componente continua alla radiazione di frenamento, alla quale è sovrapposta la componente a righe caratteristica del materiale emettitore

Viceversa, utilizzando un fascio monocromatico di raggi X di cui è nota la lunghezza d'onda si possono determinare le varie distanze  $d$ , acquisendo informazioni sulla struttura cristallina del materiale usato come bersaglio nello spettrografo.

