Lezione 20 dicembre2023

mercoledì 20 dicembre 2023 11:16

Visto: PS

Teorema: Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

Sia $(V, \langle\,,\rangle)$ sp. euclideo opp. unitario.
Allora $\forall\, v, w \in V$ vale

$$\circledast \quad |\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

↘ valore assoluto in $\mathbb{R}$
modulo in $\mathbb{C}$

$\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$

Inoltre: in $\circledast$ vale $=$ $\Longleftrightarrow$ v e w sono
LIN. DIPEND.

Dim.: Se $w = 0_V$

$\langle v, 0_V\rangle = 0$ in ogni caso $\mathbb{R}$ & $\mathbb{C}$

$\|v\| \cdot \|0_V\| = \|v\| \cdot 0 = 0$

$|\langle v, 0_V\rangle| \leq \|v\| \cdot \|0_V\|$ è verificata
e c'è $=$.

Supp. $w \neq 0_V$, cons.

$$\lambda := \frac{\overline{\langle v, w\rangle}}{\underbrace{\langle w, w\rangle}_{\neq 0}}$$

$$0 \leq \langle v - \lambda w, v - \lambda w\rangle = \langle v - \lambda w, v\rangle - \lambda \cdot \langle v - \lambda w, w\rangle$$

↓ PS è def. positivo

$$\text{PS1}_{\mathbb{C}} \quad = \langle v, v\rangle - \bar\lambda \langle w, v\rangle - \lambda \langle v, w\rangle + \lambda \cdot \bar\lambda \langle w, w\rangle$$

$$\text{PS2}_{\mathbb{C}} \quad = \langle v, v\rangle - \bar\lambda \cdot \overline{\langle v, w\rangle} - \lambda \langle v, w\rangle + \lambda \cdot \bar\lambda \langle w, w\rangle$$

$$\text{sost. } \lambda \quad = \langle v, v\rangle - \underbrace{\frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle}}_{= \bar\lambda} \cdot \overline{\langle v, w\rangle} - \frac{\overline{\langle v, w\rangle}}{\langle w, w\rangle} \cdot \langle v, w\rangle + \frac{\overline{\langle v, w\rangle} \cdot \langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle \cdot \cancel{\langle w, w\rangle}} \cdot \cancel{\langle w, w\rangle}$$

$$\lambda = \frac{\overline{\langle v, w\rangle}}{\langle w, w\rangle}$$

$$\langle w, w\rangle \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{\langle w, w\rangle} = \langle w, w\rangle$$

$$= \|v\|^2 - \frac{|\langle v, w\rangle|^2}{\|w\|^2}$$

$$z \cdot \bar z = a^2 + b^2 = |z|^2$$

$$z = a + ib$$

$$0 \le \|v\|^2 - \frac{|\langle v, w\rangle|^2}{\underbrace{\|w\|^2}_{>0}} \qquad \Big/ \cdot \|w\|^2$$

$$\underbrace{\|v\|^2}_{\substack{\in\mathbb{R}\\ \ge 0}} \cdot \underbrace{\|w\|^2}_{\substack{\in\mathbb{R}\\ > 0}} \ge \underbrace{|\langle v, w\rangle|^2}_{\substack{\in\mathbb{R}\\ \ge 0}}$$

$$\sqrt{\|v\|^2 \cdot \|w\|^2} \ge \sqrt{|\langle v, w\rangle|^2}$$

$$\|v\| \cdot \|w\| \ge |\langle v, w\rangle|$$

Supp. ora che ci sia $=$ $\iff$

$0 = \langle v - \lambda w, v - \lambda w\rangle$ $\iff$ $\text{PS3}_{\mathbb{C}}$ / PS3 $1 \cdot v - \lambda w = 0_V$

se $w \ne 0_V$

comb. lin. con coeff. non tutti nulli

$\iff$ $v = \lambda w$

Se $w = 0_V$, c'è $=$.

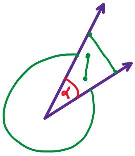
COR.: Se $(V, \langle\,,\,\rangle)$ è sp. euclideo (su $\mathbb{R}$), e v & w vettori non nulli,

allora $-1 \le \overset{\in\mathbb{R}}{\boxed{\dfrac{\langle v, w\rangle}{\underbrace{\|v\|\,\|w\|}_{\ne 0}}}} \le 1$

Def.: Se $v \ne 0_V$, $w \ne 0_V$, l'ANGOLO CONVESSO $\alpha := \arccos \dfrac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\,\|w\|} \in [0, \pi]$

$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$

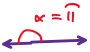
$\mathbb{R}^2$



$w = c\cdot v \quad c>0$

$$\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\|w\|} = \frac{\langle v, cv\rangle}{\|v\|\cdot c\cdot\|v\|} = \frac{c\cdot\|v\|^2}{c\cdot\|v\|^2} = 1$$

$\alpha = \arccos 1 = 0$



$\alpha = \pi$

$w = c\cdot v, \quad c<0$

OSS.: $\alpha = \arccos \dfrac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|}$

$$\cos\alpha = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|} \Rightarrow \langle v,w\rangle = \|v\|\,\|w\|\cdot\cos\alpha$$

Def: $(V, \langle\,,\rangle)$ sp. euclideo o complesso

$v, w \in V$ vettori arbitrari sono ORTOGONALI se

$v \perp w$ se $\langle v,w\rangle = 0$

In part. su $\mathbb{R}$, $v \neq 0_V$, $w \neq 0_V$, $\langle v,w\rangle = 0$

$\Rightarrow \alpha = \pi/2$.

OSS.: Diseg. di CS può essere usata per dimostrare DISEG. TRIANGOLARE per la NORMA $\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$

Visto: PS $\Rightarrow$ NORMA; vale anche il viceversa:

FORMULE DI POLARIZZAZIONE:

Data funzione NORMA su V sv su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, essa induce un PS così definito:

caso $\mathbb{R}$: $\langle v,w\rangle := \frac{1}{2}\left(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2\right)$
$\forall v, w \in V$

caso $\mathbb{C}$: $\mathrm{Re}\langle v,w\rangle := \frac{1}{2}\left(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2\right)$

$\mathrm{Im}\langle v,w\rangle := \frac{1}{2}\left(\|v-iw\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2\right)$

Infine: questo PS $\langle\,,\rangle$ induce la norma $\|\cdot\|$ di partenza.

Dim. OMESSA.

Commento: se ho PS $\langle , \rangle$ caso $\mathbb{R}$

$$\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle = \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle$$

$$= \|v\|^2 + 2\langle v,w\rangle + \|w\|^2$$

$$\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2 = 2\langle v,w\rangle$$

$$\langle v,w\rangle = \frac{1}{2}\left(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2\right)$$

* * *

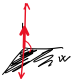
BASI ORTOGONALI &
ORTONORMALI

Def: $W \subseteq V$ sia SSV

V euclideo o unitario

$W^{\perp}$:= SSV ORTOGONALE a W

$= \{ v \in V \mid \langle w, v\rangle = 0 \ \forall w \in W\}$



Esercizio: $W^{\perp}$ è SSV.

Def.: $W^{\perp}$ COMPLEMENTO ORTOGONALE di W

Def.: V euclideo o unitario

$v_1, \dots, v_n$ vettori di V sono una

FAMIGLIA ORTOGONALE se sono a 2 a 2 ortogonali, cioè

$$\langle v_i, v_j\rangle = 0 \quad \forall i \neq j$$

FAMIGLIA ORTONORMALE se sono famiglia ortogonale e inoltre

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad \|v_i\| = 1$$

in questo caso v_i si chiamano VERSORI.

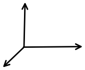
Def: Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ base di V, si dice BASE ORTONORMALE se $v_1, \dots, v_n$ sono famiglia ortonormale.

OSS: Se $v \neq 0_V$ non è versore, si può cons. il

VETTORE NORMALIZZATO:

$$\boxed{\underbrace{\frac{1}{\|v\|}}_{\in \mathbb{R}} \cdot v = \frac{v}{\|v\|} \quad \text{è prop. a } v}$$

e questo ci permette di costruire una base ortonormale a partire da base ortogonale:



$$\{v_1, v_2, v_3\} \longleftrightarrow \left\{\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \frac{v_3}{\|v_3\|}\right\}$$ base **ORTONORM!**

$$\left\| \frac{v_i}{\|v_i\|} \right\| = \left\| \frac{1}{\|v_i\|} \cdot v_i \right\| = \left| \underbrace{\frac{1}{\|v_i\|}}_{>0} \right| \cdot \|v_i\|$$

$$= \frac{1}{\|v_i\|} \cdot \|v_i\| = 1$$

Si ha $\langle v_i, v_j \rangle = 0 \Longrightarrow \left\langle \frac{v_i}{\|v_i\|}, \frac{v_j}{\|v_j\|} \right\rangle = 0$

$$= \frac{1}{\|v_i\| \cdot \|v_j\|} \cdot \langle v_i, v_j \rangle$$

$\Longrightarrow$ l'ortogonalità è mantenuta.

PROIEZIONI ORTOGONALI

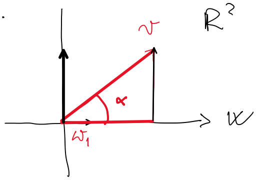
Def: $W \subseteq V$ SSV, V euclideo o unitario

Supp. che in W esista base ortonormale $\{w_1, \dots, w_m\}$

Dato $v \in V$, la sua **PROIEZIONE ORTOGONALE** su W

è $\tilde{v} := \langle w_1, v \rangle w_1 + \dots + \langle w_m, v \rangle w_m \in V$

es.



$$\tilde{v} = \langle w_1, v \rangle \cdot w_1$$

$$\big(\underbrace{\|w_1\|}_{=1} \cdot \|v\| \cdot \cos\alpha\big) \cdot w_1$$

$$= \big(\|v\| \cdot \cos\alpha\big) \cdot w_1$$

OSS.: ① $\tilde{v} \in W$

② $v - \tilde{v}$ è ortogonale a W

infatti: $\langle w_i, v - \tilde{v} \rangle = \langle w_i, v \rangle - \langle w_i, \tilde{v} \rangle$

$w_1, \dots, w_m$

$$= \langle w_i, v \rangle - \langle w_i, \sum_{j=1}^{m} \langle w_j, v \rangle w_j \rangle$$

$$= \langle w_i, v \rangle - \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \langle w_j, v \rangle \cdot \underbrace{\langle w_i, w_j \rangle}_{\substack{=0 \text{ se } i \neq j \\ =1 \text{ se } i=j}}}_{= \langle w_i, v \rangle \cdot \underbrace{\langle w_i, w_i \rangle}_{=1}}$$

$$= 0$$

Quindi $v - \tilde{v}$ è ort. a tutti i vettori della base $\{w_1, \dots, w_n\}$ $\Rightarrow$ è ort. a tutti i vettori di W

Teorema ORTONORMALIZZAZIONE di GRAM-SCHMIDT

V sp. euclideo o unitario

$W \subseteq V$ ssv di dim. m.

Allora ogni base ortonormale di W si può estendere a base ORTONORMALE di V.

COR. Ogni sp. euclideo o unitario V ammette base ortonormale:

scelgo $v_1 \in V$, $v_1 \neq 0_V$

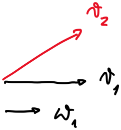
cons. $\frac{v_1}{\|v_1\|}$; cons $W = \mathrm{Span}\left(\frac{v_1}{\|v_1\|}\right)$

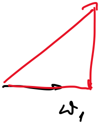
$= w_1$

Vedremo il seguente procedimento:

Se $v_1, \dots, v_n$ base di V

si può ORTONORMALIZZARE:





$$w_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$$\tilde{w}_2 := v_2 - \langle w_1, v_2 \rangle \cdot w_1$$

poi $$w_2 := \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|}$$

$$\tilde{w}_3 = v_3 - \langle w_1, v_3 \rangle w_1 - \langle w_2, v_3 \rangle w_2$$

$$w_3 := \frac{\tilde{w}_3}{\|\tilde{w}_3\|}$$

$\vdots$

$$\tilde{w}_i = v_i - \langle w_1, v_i \rangle w_1 - \dots - \langle w_{i-1}, v_i \rangle w_{i-1}$$

$$w_i = \frac{w_i}{\|\tilde{w}_i\|}$$