Scritto di Geometria 1 del 13 febbraio 2023

Esercizio 1. Risolvere e discutere in funzione dei valori $a \in \mathbb{R}$ il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + (a-1)y + (2-a)z = a+5 \\ x + ay + 2z = 4 \\ x + (a-2)y + (2-2a^2)z = 6 \end{cases}$$

Esercizio 2. (a) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e W un suo sottospazio. Dimostrare che W ammette almeno uno *spazio supplementare*, cioè un sottospazio W' di V tale che $V = W \oplus W'$.

(b) Si consideri in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio W generato dai vettori $(1,0,2)$ e $(1,0,-1)$; si costruiscano due diversi spazi supplementari di W.

Esercizio 3. Si determinino $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ sapendo che $(1,2,3),\ (1,-1,0),\ (1,0,-1) \in \mathbb{R}^3$ sono autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

Si dica se A è diagonalizzabile. Nel caso affermativo si determini una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D, tali che $B^{-1} \cdot A \cdot B = D$.

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione definita da

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, x_1 - x_2 + 3x_3).$$

(i) Verificare che f è lineare, determinare il rango di f, una base del nucleo e una base dell'immagine.

(ii) Dopo aver verificato che i vettori $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (1,1,0)$, $v_3 = (0,1,1)$ formano una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$, e che $u_1 = (1,1)$, $u_2 = (1,-1)$ formano una base $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^2$, scrivere la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$.

Esercizio 5. Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate 2×2 a coefficienti reali. Si consideri l' applicazione bilineare

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \quad \langle A, B \rangle = \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}A \cdot B),$$

dove ${}^{\mathrm{t}}A$ è la trasposta di A e $\mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}A \cdot B)$ è la traccia ${}^{\mathrm{t}}A \cdot B$.

(a) Si dimostri che $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ è uno spazio euclideo.

(b) Sia $W \subset V$ il sottoinsieme delle matrici simmetriche. Si dimostri che W è un sottospazio vettoriale di V e se ne determini la dimensione.

(c) Si determini una base di W ortonormale rispetto al prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$.