Scritto di Geometria 1 del 13 giugno 2023

Esercizio 1. Usando il Teorema della dimensione e il Teorema di determinazione di un'applicazione lineare, in ciascuno dei tre casi seguenti definire, se esistono, applicazioni lineari che soddisfano le condizioni indicate, giustificando esplicitamente il rispetto di tali condizioni.

(a) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ suriettiva e tale che $\ker f = \langle (1,0,1,0), (0,1,0,1) \rangle$;
(b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\ker g = \langle (1,0,1), (0,1,2) \rangle$ e Im$(g) = \langle (1,2) \rangle$;
(c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ iniettiva e tale che Im$(h) = \langle (v_1, v_2) \rangle$ con $v_1 = (1,1,1)$ e $v_2 = (-1,2,0)$.

Esercizio 2. Risolvere e discutere in funzione dei valori $a, b \in \mathbb{R}$ il seguente sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = b \\ x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 nell'indeterminata x, e $\mathcal{B}$ la base $1, x, x^2, x^3$. Sia $T : V \to V$ l'applicazione definita da

$$T(p(x)) = (2x+1)p'(x),$$

dove $p'(x)$ denota la derivata di $p(x)$ rispetto a x.

(1) Verificare che T è lineare.
(2) Scrivere la sua matrice rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e nel codominio.
(3) Descrivere $\ker(T)$ e Im(T), e calcolare le loro dimensioni.
(4) Verificare se l'endomorfismo è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Sia V un K-spazio vettoriale di dimensione finita e sia $V^* =$ Hom(V, K) il suo spazio duale. Si consideri una base $v_1, \ldots, v_n$ di V e si definisca $v_i^* : V \to K$ l'applicazione lineare tale che $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$, per $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

(1) Dimostrare che i vettori $v_1^*, \ldots, v_n^*$ sono linearmente indipendenti.
(2) Dimostrare che i vettori $v_1^*, \ldots, v_n^*$ generano V^*.

Esercizio 5. Sia $U \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio vettoriale di equazione

$$3x - z = 0.$$

Si determini una base ortonormale di U rispetto al prodotto scalare standard, e una base ortonormale di $U^\perp$.