Scritto di Geometria 1 del 19 settembre 2023

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ data da

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ -y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

(1) Sia $\mathcal{C}$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$ e sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,1,0)$ e $v_3 = (1,0,0)$; si scriva la matrice $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f)$.

(2) Si determini il rango,la dimensione del nucleo e una base dell'immagine di f.

(3) Si dica se può esistere un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f \circ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sia un isomorfismo, giustificando la risposta.

Esercizio 2. Per ogni valore del parametro $\alpha \in \mathbb{C}$, si consideri la seguente matrice

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{C}),$$

(1) Si determinino tutti i valori di $\alpha \in \mathbb{C}$ per i quali M è diagonalizzabile.

(2) Per $\alpha = 0$, si determinino una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che

$$B^{-1} \cdot M \cdot B = D.$$

Esercizio 3. Sia $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare tale che

$$M_{\mathcal{C}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

dove $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(1) Si verifichi che g è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$.

(2) Si determini una base del sottospazio $W^{\perp}$ ortogonale, rispetto al prodotto scalare g, al piano vettoriale $W \subset \mathbb{R}^3$ generato dai vettori $w_1 = (1,0,0)$ e $w_2 = (1,0,1)$.

Esercizio 4. (1) Sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di V spazio vettoriale euclideo. Si dimostri che $f : V \to V$ è un endomorfismo autoaggiunto se e solo se $M_{\mathcal{B}}(f)$ è una matrice simmetrica.

(2) Si dimostri che per ogni autovalore λ di un endomorfismo autoaggiunto su uno spazio unitario si ha che λ è reale.