Scritto di Geometria 1 del 27 giugno 2023

Esercizio 1. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ e $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare associata ad A.

(1) Si determinino una base di $\mathrm{Ker}(L_A)$ e una dell'immagine di L_A.

(2) Siano $e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4$ i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$. Si dimostri che

$$\mathcal{A} = (e_4, e_3, e_2, e_1 - e_3) \quad \text{e} \quad \mathcal{B} = (e_3 + 2e_4, e_2, e_3, e_1 + e_3)$$

sono due basi di $\mathbb{R}^4$.

(3) Trovare $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(L_A)$ la matrice associata a L_A rispetto alle basi $\mathcal{A}$ nel dominio e $\mathcal{B}$ nel codominio.

(4) Trovare, se esiste, un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $g \circ L_A = 0$ e tale che la dimensione dell'immagine di g sia 2, giustificando la risposta.

Esercizio 2. (1) Siano $f : V \to W$ lineare e $v_1, \ldots, v_k$ una base di $\mathrm{Ker}(f)$, e si consideri un prolungamento ad una base $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$ di V. Dimostrare che $f(v_{k+1}), \ldots, f(v_n)$ è una base dell'immagine di f.

(2) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare fra spazi vettoriali di dimensione finita. Dimostrare che esistono basi $\mathcal{A}$ di V e $\mathcal{B}$ di W tali che la matrice $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)$ è della forma:

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove E_r è la matrice identica $r \times r$ e gli 0 rappresentano delle matrici con entrate tutte nulle.

Esercizio 3. Si consideri la matrice $M_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2t-1 & t & 1 \end{pmatrix}$ dipendente dal parametro t.

(1) Si dica per quali $t \in \mathbb{R}$ gli autovalori di M_t sono tutti reali, specificando i casi in cui ci sono autovalori di molteplicità algebrica maggiore di 1.

(2) Si determini per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la matrice M_t è diagonalizzabile sul campo dei numeri reali.

Esercizio 4. Si consideri il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Sia $b : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ l'applicazione definita da

$$b(z_1, z_2) = 2\, \mathfrak{Re}\, (z_1 \cdot z_2),$$

dove $\mathfrak{Re}$ indica la parte reale di un numero complesso.

(1) Si dimostri che b è bilineare e simmetrica.

(2) Si verifichi se b è definita positiva.

(3) Si consideri la base $\mathcal{B} = (1, i)$ di $\mathbb{C}$; si calcoli $M_{\mathcal{B}}(b)$.