PROVA DI COMPITO DI GEOMETRIA

TUTTE LE RISPOSTE DEVONO ESSERE ADEGUATAMENTE MOTIVATE

1. Considerare il seguente sistema lineare
$$\begin{cases} x - 3y & = a \\ 2y - z & = b \\ x - 5y + z & = c \end{cases}$$
Trovare la relazione che deve intercorrere fra i parametri $a, b, c \in \mathbb{R}$ perchè il sistema sia compatibile, e in tal caso trovare lo spazio delle soluzioni.

2. (a) Verificare che le seguenti sono basi di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^2$ rispettivamente: $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ con $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,1,0)$, $v_3 = (1,0,0)$, $\mathcal{B}' = (w_1, w_2)$ con $w_1 = (1,1)$, $w_2 = (1,0)$.
   (b) Sia f la seguente applicazione lineare: $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$:
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + 2y + z \end{pmatrix}$$
   Dette $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ le basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^2$, scrivere le matrici $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}(f)$ e $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$.
   (c) Determinare il rango, una base dell'immagine e una base del nucleo di f.

3. In ciascuno dei tre casi seguenti determinare, se esistono, applicazioni lineari che soddisfano le condizioni indicate.
   (a) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ suriettiva e tale che $\ker f =< (1,0,1,0) >$;
   (b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\mathrm{Im}(g) =< (1,1) >$;
   (c) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ iniettiva e tale che $\mathrm{Im}(h) =< (v_1, v_2) >$ con $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (-1,2,0)$.

4. Sia $f : V \to W$ un'applicazione fra K-spazi vettoriali. Il grafico di f è il sottinsieme di $V \times W$ così definito: $\Gamma_f = \{(v,w) \in V \times W \mid w = f(v), v \in V\}$. Dimostrare che f è lineare se e solo se Γ_f è sottospazio vettoriale di $V \times W$ (con la struttura di spazio vettoriale data da $(v,w) + (v',w') = (v + v'.w + w')$ e $\lambda(v,w) = (\lambda v, \lambda w)$).

5 Dimostrare che una matrice $n \times n$ A non è invertibile se e solo se esiste una matrice $n \times n$ $B \neq 0$ tale che $AB = 0$.