

# Geometria 1

## Simulazione prova scritta

January 5, 2023

1. In  $\mathbb{R}^4$  si consideri il sottospazio vettoriale  $W$  generato dai seguenti vettori:

$$v_1 = (1, 2, 0, 1), v_2 = (0, 1, 3, -1), v_3 = (1, 3, 3, 0), v_4 = (1, 0, -6, 3), v_5 = (2, 3, -3, 3).$$

- Estrarre da  $v_1, \dots, v_5$  una base  $\mathcal{B}_W$  di  $W$  e determinare  $\dim W$ .
  - Completare  $\mathcal{B}_W$  a una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathbb{R}^4$ .
  - Applicando il teorema di determinazione di un'applicazione lineare, costruire un'applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  avente  $W$  come nucleo.
  - Scrivere la matrice di  $f$  rispetto alle basi canoniche.
2. (a) Si determinino tutte le matrici simili alla matrice unità  $E_n$ .
- (b) Siano  $A, B \in M(n \times n, \mathbb{K})$  due matrici simili:  $A \sim B$ . Si dimostri che  $\det A = \det B$ .
- (c) Usando il primo punto, si verifichi che il viceversa non vale, esibendo due matrici  $C, D \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$  tali che  $\det C = \det D$ , ma  $C \not\sim D$ .
3. Si consideri la seguente matrice di  $M(3 \times 3, \mathbb{C})$ :

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & 2 \\ 1 & t & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dove  $t \in \mathbb{C}$  è un parametro.

Trovare per quali valori di  $t$  si ha che  $A_t$  è diagonalizzabile. Per tali  $t$ , si determini una matrice diagonale simile ad  $A_t$  e una base di  $\mathbb{C}^3$  di autovettori di  $A_t$ .

4. Sia  $P$  la matrice  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Dimostrare che l'applicazione

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : M_{2,2}(\mathbb{R}) \times M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

definita da  $\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^t B P A)$  è un prodotto scalare. (Notazione: se  $M$  è una matrice,  $\text{tr}(M)$  denota la sua traccia.)

5. Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  e sia  $T : V \rightarrow V$  un isomorfismo. Sia  $\lambda$  un autovalore di  $T$ . Si dimostri che  $\lambda^{-1}$  è un autovalore di  $T^{-1}$ .