Scritto di Geometria 1 del 27 gennaio 2023

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio vettoriale W generato dai seguenti vettori: $v_1 = (0, 1, 3, 2), v_2 = (1, 1, 1, 1), v_3 = (3, 4, 6, 5)$, $v_4 = (1, 0, -2, -1), v_5 = (1, 6, 16, 11)$.

(1) Estrarre da $v_1, \ldots, v_5$ una base $\mathcal{B}_W$ di W e determinare $\dim W$.
(2) Completare $\mathcal{B}_W$ a una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$.
(3) Applicando il teorema di determinazione di un'applicazione lineare, costruire un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\ker f = \operatorname{Im} f = W$.
(4) Scrivere la matrice di f rispetto alle basi canoniche.

Esercizio 2. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare fra spazi vettoriali e $(v_1, \ldots, v_n)$ una base di V. Si dimostri che

(1) f è iniettiva se e solo se $f(v_1), \cdots, f(v_n)$ sono vettori linearmente indipendenti in W;
(2) f è suriettiva se e solo se $f(v_1), \cdots, f(v_n)$ generano lo spazio vettoriale W.

Esercizio 3. Si consideri la seguente matrice di $M(3 \times 3, \mathbb{R})$:

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix},$$

dove $t \in \mathbb{R}$ è un parametro.

Trovare per quali valori di t si ha che A_t è diagonalizzabile. Per tali t, si determini una matrice diagonale simile ad A_t ed una base di $\mathbb{R}^3$ di autovettori di A_t.

Esercizio 4. Sia $p : V \to V$ un endomorfismo tale che $p^2 = p$, cioè tale che $p(p(v)) = p(v)$ per ogni $v \in V$ (un tale p viene chiamato *proiezione*).

(1) Si dimostri che $V = \ker p \oplus \operatorname{Im} p$;
(2) si determini lo spettro $\operatorname{Sp}(p)$ di p e si dica se p è diagonalizzabile;
(3) se p è iniettivo, a quale endomorfismo particolare corrisponde?

Esercizio 5. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ si fissi il prodotto scalare standard, si consideri il sottospazio vettoriale

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - 2z = 0\}.$$

Si calcolino la dimensione di W, una base ortonormale di W ed una base ortonormale di $W^\perp$.