PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI MATEMATICA
Anno accademico 2023/2024 – STAN
SIMULAZIONE DEL 11.12.2023

1. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

$$3x^4 \cos x\,, \qquad \frac{e^x}{x}\,, \qquad \cos(2x)\,.$$

Svolgimento. La prima: pongo $h(x) = 3x^4 \cos x$, $f(x) = 3x^4$ e $g(x) = \cos x$, per cui $h(x) = f(x)g(x)$. Allora

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ &= 3 \cdot 4x^3 \cos x + 3x^4(-\sin x) \\ &= 3x^3(4\cos x - x \sin x)\,. \end{aligned}$$

La seconda: pongo $h(x) = \frac{e^x}{x}$, $f(x) = e^x$ e $g(x) = x$, per cui $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Allora

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \\ &= \frac{e^x x - e^x \cdot 1}{x^2} \\ &= e^x \frac{x-1}{x^2}\,. \end{aligned}$$

La terza: pongo $h(x) = \cos(2x)$, $f(x) = 2x$ e $g(y) = \cos y$, per cui $h(x) = g(f(x))$. Allora

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(f(x))f'(x) \\ &= (-\sin(f(x))f'(x) \\ &= (-\sin(2x) \cdot 2 \\ &= -2\sin(2x)\,. \end{aligned}$$

2. Trovare le primitive delle seguenti funzioni:

$$\sqrt[3]{x^2}\,, \qquad e^{\cos x} \sin x\,, \qquad \cos^2 x\,.$$

Svolgimento. La prima: si tratta di x^α con $\alpha = \frac{2}{3}$. Allora

$$\int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + c = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + c = \frac{3}{5} \sqrt[3]{x^5} + c\,.$$

La seconda: osservo che la derivata di $e^{\cos x}$ è $e^{\cos x}(-\sin x)$. Allora

$$\int e^{\cos x} \sin x \, dx = -e^{\cos x} + c\,.$$

La terza: dalle formule di addizione per le funzioni trigonometriche si trova che

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x\,,$$

$$\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x\,.$$

Usando l'identità $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, ne segue che

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1\,,$$

da cui

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos(2x) + 1)\,.$$

Allora

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x\, dx &= \frac{1}{2}\int (\cos(2x) + 1)\, dx \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}\sin(2x) + x\Big) + c = \frac{x + \sin x \cos x}{2} + c\,.\end{aligned}$$

3. Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_0^{\frac{\pi}{16}} \tan(4x)\, dx\,, \qquad \int_{-10}^{10} x^9\, dx\,.$$

<u>Svolgimento</u>. Il primo: trovo dapprima le primitive. Essendo

$$\int \tan x\, dx = -\ln(\cos x) + c\,,$$

si ha che

$$\int \tan(4x)\, dx = -\frac{1}{4}\ln(\cos(4x)) + c\,.$$

Allora

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{16}} \tan(4x)\, dx &= -\frac{1}{4}\ln\Big(\cos\Big(4\frac{\pi}{16}\Big)\Big) - (-\frac{1}{4}\ln(\cos(4\cdot 0))) \\ &= -\frac{1}{4}\ln\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\Big) + \frac{1}{4}\ln(1) \\ &= -\frac{1}{4}[\ln(\sqrt{2}) - \ln(2)] \\ &= -\frac{1}{4}[\ln(2^{\frac{1}{2}}) - \ln(2)] \\ &= -\frac{1}{4}\Big[\frac{1}{2}\ln(2) - \ln(2)\Big] \\ &= \frac{1}{8}\ln(2)\,.\end{aligned}$$

4. Scrivere il numero complesso $(1-i)^8$ nella forma canonica $a+ib$.

Svolgimento. Primo modo: dapprima scrivo $1-i$ nella forma trigonometrica

$$1-i=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)\,.$$

Il modulo è $\rho=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$, mentre l'argomento è $\theta=\frac{7\pi}{4}$. Allora, usando la formula di De Moivre,

$$\begin{aligned}(1-i)^8 &= \rho^8(\cos(8\theta)+i\sin(8\theta))\\ &= (\sqrt{2})^8(\cos(14\pi)+i\sin(14\pi))\\ &= 16(1+i\cdot 0)=16\,.\end{aligned}$$

Secondo modo: calcolo direttamente

$$(1-i)^8=((1-i)^2)^4=(1-2i+i^2)^4=(-2i)^4=(-2)^4i^4=16\cdot 1=16\,.$$