PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI MATEMATICA
Anno accademico 2023/2024 – STAN
SIMULAZIONE DEL 12.12.2023

1. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

$$(x^2+3x-5)\tan x\,, \qquad \frac{\sinh(x)}{2-x^3}\,, \qquad \cosh(3-7x^2)\,.$$

Svolgimento. La prima: pongo $h(x)=(x^2+3x-5)\tan x$, $f(x)=x^2+3x-5$ e $g(x)=\tan x$, per cui $h(x)=f(x)g(x)$. Allora

$$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=(2x+3)\tan x+(x^2+3x-5)\frac{1}{\cos^2 x}\,.$$

La seconda: pongo $h(x)=\dfrac{\sinh(x)}{2-x^3}$, $f(x)=\sinh(x)$ e $g(x)=2-x^3$, per cui $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Allora

$$h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}=\frac{\cosh(x)(2-x^3)-\sinh(x)(-3x^2)}{(2-x^3)^2}\,.$$

La terza: pongo $h(x)=\cosh(3-7x^2)$, $f(x)=3-7x^2$ e $g(y)=\cosh(y)$, per cui $h(x)=g(f(x))$. Allora

$$h'(x)=g'(f(x))f'(x)=\sinh(f(x))f'(x)=\sinh(3-7x^2)(-14x)\,.$$

2. Trovare le primitive delle seguenti funzioni:

$$\cosh(3x+1)\,, \qquad xe^{x^2}-3\sin x+5\,.$$

Svolgimento. La prima: vedo che la derivata di $\sinh(3x+1)$ è $\cosh(3x+1)\cdot 3$. Allora,

$$\int \cosh(3x+1)\,dx=\frac{1}{3}\sinh(3x+1)+c\,.$$

La seconda: per le formule di linearità,

$$\begin{aligned}\int (xe^{x^2}-3\sin x+5)\,dx &= \int xe^{x^2}\,dx+3\int(-\sin x)\,dx+\int 5\,dx\\ &= \frac{1}{2}e^{x^2}+3\cos x+5x+c\,.\end{aligned}$$

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^2 \frac{5}{x^3}\,dx\,.$$

Svolgimento. Trovo dapprima una primitiva:

$$\int \frac{5}{x^3}\,dx = 5\int x^{-3}\,dx = 5\frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c = -\frac{5}{2}x^{-2} + c = -\frac{5}{2x^2}\,.$$

Ora uso il Teorema Fondamentale:

$$\int_1^2 \frac{5}{x^3}\,dx = \Big(-\frac{5}{2\cdot 2^2}\Big) - \Big(-\frac{5}{2\cdot 1^2}\Big) = \frac{15}{8}\,.$$

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^2-9}{x-1}\,.$$

Svolgimento. Essa non è definita se $x = 1$; quindi la studieremo sul dominio

$$]-\infty, 1[\,\cup\,]1, +\infty[\,.$$

Osservo che se x si avvicina a 1 da destra, il numeratore ha circa valore 8, quindi positivo, mentre il denominatore è positivo e tende a 0. Quindi i valori saranno molto grandi e positivi se x è vicino a 1, con $x > 1$. Se invece x si avvicina a 1 da sinistra, il numeratore ha sempre circa valore 8, quindi positivo, mentre il denominatore è negativo e tende a 0. Quindi i valori saranno molto grandi e negativi se x è vicino a 1, con $x < 1$.

Studiamo il segno della funzione. Vedo che

$$x^2 - 9 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -3 \ \text{ o } \ x > 3\,.$$

mentre

$$x - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1\,.$$

Ne segue che

$$f(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } x < -3\,, \\ > 0 & \text{se } -3 < x < 1\,, \\ < 0 & \text{se } 1 < x < 3\,, \\ > 0 & \text{se } x > 3\,. \end{cases}$$

Ora calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2-9)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 9}{(x-1)^2}\,.$$

Studiamone il segno. Vedo che sia il numeratore che il denominatore sono sempre positivi sul dominio di f, per cui

$$f'(x) > 0 \quad \text{per ogni } x \in\,]-\infty, 1[\,\cup\,]1, +\infty[\,.$$

Ne segue che f è strettamente crescente sia su $]-\infty, 1[$ che su $]1, +\infty[$.

Calcoliamo anche la derivara seconda:

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x+9)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{16}{(x-1)^3}\,.$$

Quindi

$$f(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } x < 1\,, \\ > 0 & \text{se } x > 1\,. \end{cases}$$

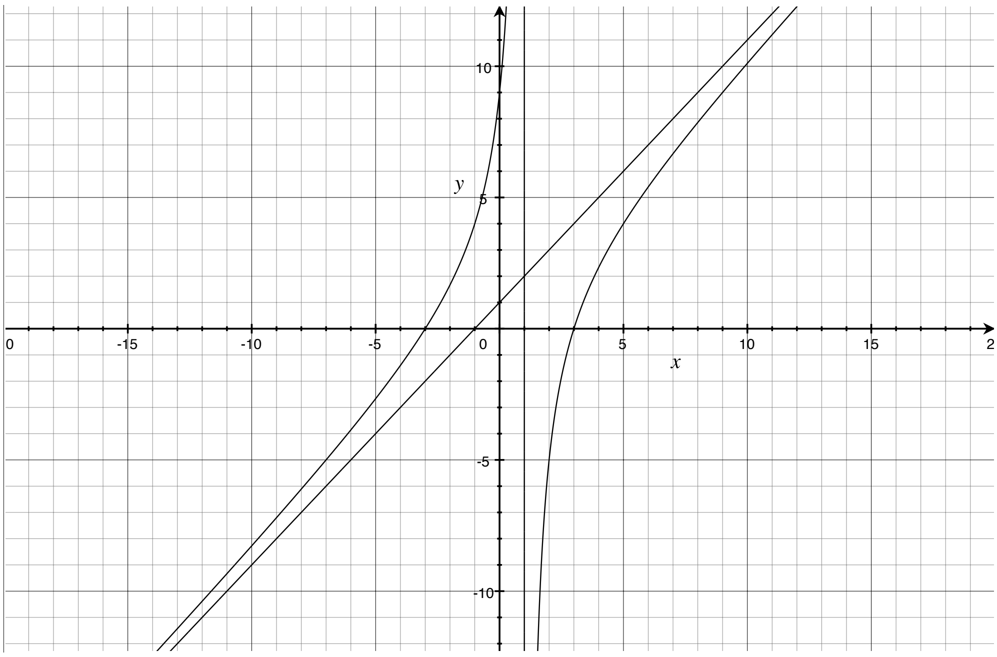
Ne segue che f è strettamente concava su $]-\infty, 1[$ e strettamente convessa su $]1, +\infty[$.

Ora facciamo una considerazione intuitiva: per $x > 0$ molto grande, il comportamento di $x^2 - 9$ è simile a x^2 e il comportamento di $x - 1$ è simile a x. Semplificando $\frac{x^2}{x}$ torviamo x. Andiamo allora a confrontare $f(x)$ con x:

$$f(x) - x = \frac{x^2-9}{x-1} - x = \frac{x-9}{x-1} = 1 - \frac{8}{x-1}\,.$$

Siccome il termine $\frac{8}{x-1}$ tende a zero al crescere di x, concludiamo che $f(x)$ si avvicina sempre più a $x + 1$ quando x è molto grande. Si dice che la retta di equazione $y = x + 1$ è un "asintoto a $+\infty$" per la funzione f. Lo stesso vale se x è grande ma negativo, per cui la stessa retta è anche un "asintoto a $-\infty$" per la funzione.

Possiamo disegnarne il grafico:



Sembrerebbe che il grafico sia simmetrico rispetto al punto $(1, 2)$. Per vedere se ciò è vero, definisco una nuova funzione:

$$g(x) = f(x+1) - 2\,.$$

Abbiamo quindi che

$$g(x) = \frac{(x+1)^2 - 9}{(x+1) - 1} - 2 = \frac{x^2 + 2x + 1 - 9}{x} - 2 = \frac{x^2 - 8}{x}\,.$$

Notiamo che g è una funzione dispari:

$$g(-x) = -g(x)\,, \quad \text{per ogni } x \neq 0\,.$$

Pertanto, il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine $(0,0)$, come si vede dalla figura seguente. Si noti che il grafico di g non è altro che il grafico di f spostato a sinistra di 1 e abbassato di 2.