

PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI MATEMATICA
Anno accademico 2023/2024 – STAN
SIMULAZIONE DEL 18.12.2023

1. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

$$\frac{x^3 - 7x + 5}{x \sin x}, \quad \sinh(\cosh(x)), \quad \sqrt{x+2} \tan(3 - 7x^2).$$

Svolgimento. La prima: pongo $h(x) = \frac{x^3 - 7x + 5}{x \sin x}$, $f(x) = x^3 - 7x + 5$ e $g(x) = x \sin x$, per cui $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Allora

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \\ &= \frac{(3x^2 - 7)(x \sin x) - (x^3 - 7x + 5)(1 \cdot \sin x + x \cos x)}{(x \sin x)^2} \\ &= \frac{(2x^3 - 5) \sin x - (x^3 - 7x + 5)x \cos x}{x^2 \sin^2 x}. \end{aligned}$$

La seconda: pongo $h(x) = \sinh(\cosh(x))$, $f(x) = \cosh(x)$ e $g(y) = \sinh(y)$, per cui $h(x) = g(f(x))$. Allora

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x) = \cosh(f(x))f'(x) = \cosh(\cosh(x)) \sinh(x).$$

La terza: pongo $h(x) = \sqrt{x+2} \tan(3 - 7x^2)$, $f(x) = \sqrt{x+2}$ e $g(x) = \tan(3 - 7x^2)$, per cui $h(x) = f(x)g(x)$. Allora

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x+2}} \cdot 1 \right) \tan(3 - 7x^2) + \sqrt{x+2} \left(\frac{1}{\cos^2(3 - 7x^2)} \right) (-14x) \\ &= \frac{\tan(3 - 7x^2)}{2\sqrt{x+2}} - \frac{14x\sqrt{x+2}}{\cos^2(3 - 7x^2)}. \end{aligned}$$

2. Trovare le primitive delle seguenti funzioni:

$$\sqrt{1-6x}, \quad 4 \tan\left(\frac{x}{2}\right) + x^2 e^{x^3}.$$

Svolgimento. La prima: scrivo $\sqrt{1-6x} = (1-6x)^{\frac{1}{2}}$ e, tenendo conto del fatto che la derivata di $(1-6x)$ è uguale a -6 , ho che

$$\int (1-6x)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{-6} \frac{(1-6x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{(1-6x)^3}}{9}.$$

La seconda: uso le formule di linearità e mi ricordo che una primitiva di $\tan x$ è $-\ln(\cos x)$ e la derivata di $\frac{x}{2}$ è uguale a $\frac{1}{2}$, per cui

$$\begin{aligned} \int \left(4 \tan \left(\frac{x}{2} \right) + x^2 e^{x^3} \right) dx &= 4 \int \tan \left(\frac{x}{2} \right) dx + \int x^2 e^{x^3} dx \\ &= -8 \ln \left(\cos \left(\frac{x}{2} \right) \right) + \frac{1}{3} e^{x^3} + c. \end{aligned}$$

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{(x+2)^3} dx.$$

Svolgimento. Trovo dapprima una primitiva; scrivendo $\frac{1}{(x+2)^3} = (x+2)^{-3}$, ho che, siccome la derivata di $x+2$ è uguale a 1,

$$\int (x+2)^{-3} dx = \frac{(x+2)^{-3+1}}{-3+1} + c = -\frac{1}{2(x+2)^2} + c.$$

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 3}.$$

Svolgimento. Essa è definita se $x \neq -3$, ossia sul dominio

$$]-\infty, -3[\cup]-3, +\infty[.$$

Osservo che se x si avvicina a -3 da destra, il numeratore ha circa valore 8, quindi positivo, mentre il denominatore è positivo e tende a 0. Quindi i valori saranno molto grandi e positivi se x è vicino a -3 , con $x > -3$. Se invece x si avvicina a -3 da sinistra, il numeratore ha sempre circa valore 8, quindi positivo, mentre il denominatore è negativo e tende a 0. Quindi i valori saranno molto grandi e negativi se x è vicino a -3 , con $x < -3$.

Studiamo il segno della funzione. Vedo che

$$x^2 - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -1 \quad \text{o} \quad x > 1.$$

mentre

$$x + 3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -3.$$

Ne segue che

$$f(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } x < -3, \\ > 0 & \text{se } -3 < x < -1, \\ < 0 & \text{se } -1 < x < 1, \\ > 0 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Calcoliamone la derivata:

$$f'(x) = \frac{2x(x+3) - (x^2-1) \cdot 1}{(x+3)^2} = \frac{x^2 + 6x + 1}{(x+3)^2}.$$

Il suo segno dipende solo dal segno del numeratore, essendo il denominatore sempre positivo. Vedo che

$$x^2 + 6x + 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -3 - \sqrt{8} \quad \text{o} \quad x > -3 + \sqrt{8}.$$

Essendo $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, ne deduciamo che

$$f \text{ è } \begin{cases} \text{strettamente crescente su }] - \infty, -3 - 2\sqrt{2}[, \\ \text{strettamente decrescente su }] - 3 - 2\sqrt{2}, -3[, \\ \text{strettamente decrescente su }] - 3, -3 + 2\sqrt{2}[, \\ \text{strettamente crescente su }] - 3 + 2\sqrt{2}, +\infty[. \end{cases}$$

La funzione ha in $-3 - 2\sqrt{2}$ un punto di massimo locale, con valore

$$f(-3 - 2\sqrt{2}) = -6 - 4\sqrt{2} \approx -11,66,$$

ed essa ha in $-3 + 2\sqrt{2}$ un punto di minimo locale, con valore

$$f(-3 + 2\sqrt{2}) = -6 + 4\sqrt{2} \approx -0,34.$$

Calcoliamo ora la derivata seconda di f :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2x+6)(x+3)^2 - (x^2+6x+1)2(x+3)}{(x+3)^4} \\ &= \frac{(2x+6)(x+3) - 2(x^2+6x+1)}{(x+3)^3} \\ &= \frac{16}{(x+3)^3}. \end{aligned}$$

Notiamo che

$$f''(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } x < -3, \\ > 0 & \text{se } x > -3, \end{cases}$$

per cui

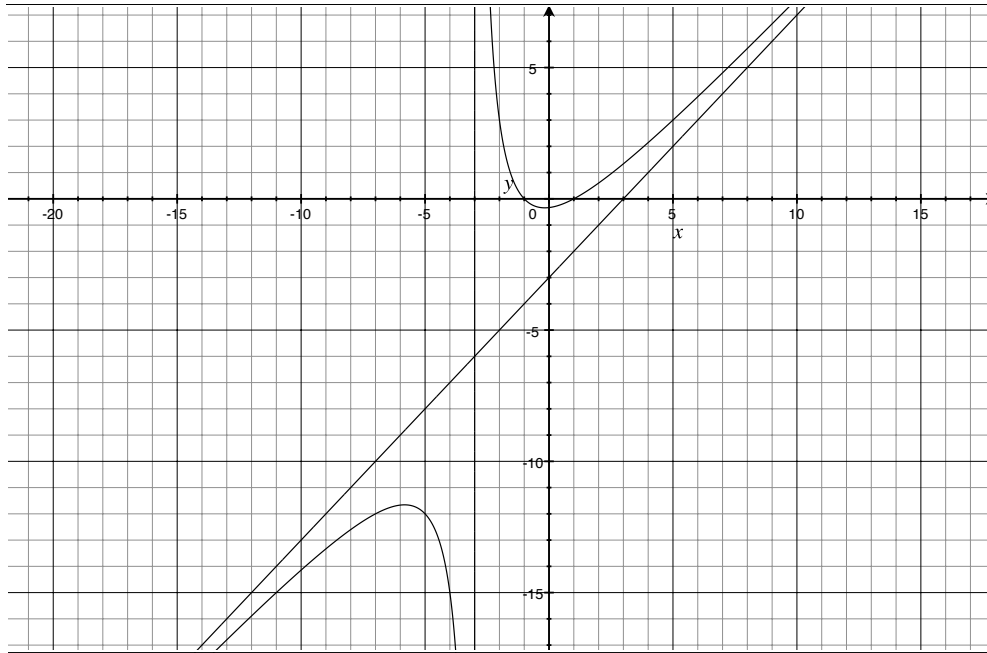
$$f \text{ è } \begin{cases} \text{strettamente concava su }] - \infty, -3[, \\ \text{strettamente convessa su }] - 3, +\infty[. \end{cases}$$

Cos'altro fare? Si potrebbe cercare se c'è un asintoto a $+\infty$ o a $-\infty$. Lasciamo ai volenterosi verificare che effettivamente esiste, è la retta di equazione $y = x - 3$, la stessa sia a $+\infty$ che a $-\infty$. Inoltre, si potrebbe verificare che il grafico è simmetrico rispetto al punto $(-3, -6)$. Basta verificare che la funzione

$$g(x) = f(x - 3) - 6$$

è dispari.

Possiamo infine disegnare il grafico di f .



5. Scrivere il numero complesso

$$\frac{7 + 3i}{2 - 5i}$$

nella forma usuale $a + ib$, con a e b in \mathbb{R} .

Svolgimento. Con il solito trucco del “moltiplica e dividi per...” abbiamo che

$$\begin{aligned} \frac{7 + 3i}{2 - 5i} &= \frac{7 + 3i}{2 - 5i} \frac{2 + 5i}{2 + 5i} \\ &= \frac{14 + 35i + 6i + 15i^2}{2^2 - (5i)^2} \\ &= \frac{-1 + 41i}{4 + 25} \\ &= -\frac{1}{29} + i \frac{41}{29}. \end{aligned}$$