Soluzione prova parziale 19 dicembre 2023

mercoledì 27 dicembre 2023 17:13

① Si consideri $F = x_0^2x_2^2 - x_1(x_1-x_0)(x_1+x_0)(x_1-2x_0) = 0$

ⓐ Determinare punti singolari, le loro molteplicità e le tangenti.

Si ha: $\nabla F = \begin{pmatrix} -6x_0^2x_1 + 2x_0x_1^2 + 2x_0x_2^3 + 2x_1^3 \\ -2x_0^3 + 2x_0^2x_1 + 6x_0x_1^2 - 4x_1^3 \\ 2x_0^2x_2 \end{pmatrix}$

e $\nabla F(q_0, q_1, q_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff Q = (q_0 : q_1 : q_2) = (0:0:1)$ è l'unico punto singolare.

Per determinare molteplicità di Q e sue tangenti

cons. la restrizione a $U_2 = \{x_2 \neq 0\}$ e l'equazione affine

in $\mathbb{A}^2 = j_2^{-1}(U_2)$:

per fare ciò deomogeneizzo rispetto a x_2 e trovo:

$f(x,y) = F(x,y,1) = x^2 - y(y-x)(y+x)(y-2x)$

vedo che il termine omogeneo di grado 2 è non nullo $\Rightarrow (0,0)$ è doppio per $Z(f) \subseteq \mathbb{A}^2$

con unica tangente $x = 0$

$\Rightarrow (0:0:1)$ è doppio per $Z_p(F)$ con unica tangente $x_0 = 0$.

ⓑ Determinare $Pol_{E_2}F$ e le rette tangenti a $Z_p(F)$ e passanti per $E_2 = (0:0:1)$

Si ha $Pol_{E_2}F = 0 \cdot \partial_{x_0}F + 0 \cdot \partial_{x_1}F + 1 \cdot \partial_{x_2}F$

$= 2x_0^2x_2$

Sappiamo che i punti non singolari di $Z_p(F) \cap Z_p(Pol_{E_2}F)$

sono i punti di tangenza di tutte le tangenti uscenti da E_2.

$F: \begin{cases} x_0^2x_2^2 - x_1(x_1-x_0)(x_1+x_0)(x_1-2x_0) = 0 \\ 2x_0^2x_2 = 0 \end{cases}$ $Pol_{E_2}F$

$x_0 = 0 \Downarrow x_1^4 = 0 \Rightarrow (0:0:1)$ che è singolare

$x_2 = 0 \Downarrow x_1(x_1-x_0)(x_1+x_0)(x_1-2x_0) = 0$

$\Rightarrow$ trovo i punti: $(1:0:0)$ $(x_1 = 0)$

$(1:1:0)$ $(x_1 = x_0)$

$(1:-1:0)$ $(x_1 = -x_0)$

$(1:2:0)$ $(x_1 = 2x_0)$

Le tangenti alla curva in tali punti sono proprio le 4 rette:

$x_1 = 0$

$x_1 - x_0 = 0$

$x_1 + x_0 = 0$

$x_1 - 2x_0 = 0$

Infatti, se le interseco con la curva, trovo una molteplicità di intersezione $= 2$.

Altrimenti: calcolo ∇F in ciascuno dei 4 punti e trovo le rette tg:

$\nabla F(1,0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, tg: $-2x_1 = 0$ cioè $x_1 = 0$

$\nabla F(1,1,0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, tg: $-2x_0 + 2x_1 = 0$ cioè $x_0 - x_1 = 0$

$\nabla F(1,-1,0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, tg $6x_0 + 6x_1 = 0$ cioè $x_0 + x_1 = 0$

$\nabla F(1,2,0) = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$, tg $12x_0 - 6x_1 = 0$ cioè $2x_0 - x_1 = 0$.

② Si consideri $f = x - xy^2 + 1 = 0$

ⓐ Determinare punti singolari e asintoti.

$F = hf = x_0^2x_1 - x_1x_2^2 + x_0^3$

$\nabla F = \begin{pmatrix} x_0(3x_0 + 2x_1) \\ x_0^2 - x_2^2 \\ -2x_1x_2 \end{pmatrix}$

$\nabla F(q_0, q_1, q_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (q_1 : q_2 : q_3) = (0:1:0)$

$\Rightarrow Sing(Z_p(F)) = \{(0:1:0)\}$

Asintoti: sono le tangenti ai punti impropri NON SINGOLARI;

PUNTI IMPROPRI: $Z_p(F) \cap Z_p(x_0) = \{(0:1:0), (0:0:1)\}$

Retta tg in $(0:0:1)$: ${}^t\nabla F(0,0,1) \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (0 \ -1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -x_1$

$x_1 = 0$ unico asintoto

ⓑ Determinare i punti di flesso della chiusura proiettiva.

Sappiamo che i punti di flesso sono dati da $Z_p(F) \cap Z_p(H_F) \setminus Sing(F)$ dove H_F è il determinante hessiano.

Si ha: $M_F = \begin{pmatrix} 6x_0 + 2x_1 & 2x_0 & 0 \\ 2x_0 & 0 & -2x_2 \\ 0 & -2x_2 & -2x_1 \end{pmatrix}$

e il determinante è

$H_F = 8(x_0^2x_1 - 3x_0x_2^2 - x_1x_2^2)$

Eq. di $Z_p(F) \cap Z_p(H_F)$:

$\begin{cases} x_0^3 + x_0^2x_1 - x_1x_2^2 = 0 \\ x_0^2x_1 - 3x_0x_2^2 - x_1x_2^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_0^3 + x_0^2x_1 - x_1x_2^2 = 0 \\ x_0^2x_1 - 3x_0x_2^2 - (x_0^3 + x_0^2x_1) = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x_0^3 + x_0^2x_1 - x_1x_2^2 = 0 \\ -x_0(3x_2^2 + x_0^2) = 0 \end{cases}$

$x_0 = 0 \Rightarrow (0:0:1)$ flesso e $(0:1:0)$ singolare

$x_0 = \sqrt{3}i\,x_2 \Rightarrow (\sqrt{3}i : -\frac{3\sqrt{3}}{4}i : 1)$ flesso e $(0:1:0)$ singolare

$x_0 = -\sqrt{3}i\,x_2 \Rightarrow (-\sqrt{3}i : \frac{3\sqrt{3}}{4}i : 1)$ flesso e $(0:1:0)$ singolare

Nota: i 3 flessi sono allineati e contenuti nella retta $3x_0 + 4x_1 = 0$

③ Cons. P_1 e P_2 punti di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, e sia

$\Lambda = \{[F] \in \mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_3) \mid \nabla F(P_1) = \nabla F(P_2) = 0\}$

Osservo che tali F sono necessariamente riducibili, perché i

punti singolari di una curva irriducibile $Z_p(G)$

soddisfano $\# Sing\, Z_p(G) \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} = 1$ se $n = 3$.

Inoltre, la retta $\overline{P_1P_2}$ interseca $Z_p(F)$ in P_1 con molteplicità ≥ 2 (perché P_1 è singolare) e in P_2 con molt. ≥ 2.
Si ha quindi

$\sum_{Q \in Z_p(F) \cap \overline{P_1P_2}} I_Q(F, \overline{P_1P_2}) \geq 4$; $\deg F = 3$

$\Rightarrow$ per Bézout $\overline{P_1P_2} \subseteq Z_p(F)$; quindi la retta $\overline{P_1P_2}$ è una componente fissa di Λ.

Quindi $Z_p(F) = \overline{P_1P_2} \cup C$, con C conica per P_1 e P_2 (perché $Z_p(F)$ deve essere singolare in P_1 e P_2).
Il sistema lineare di tali coniche ha dimensione

$\dim \mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_2) - 2 = 5 - 2 = 3$

(passaggio per 2 punti distinti)

quindi $\dim \Lambda = 3$.
Tra le coniche passanti per P_1 & P_2 ci sono anche le coniche degeneri.
Osserviamo che $\dim \mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_3) - \dim \Lambda = 9 - 3 = 6$,

quindi le condizioni di singolarità in P_1 e P_2 sono 6 condizioni linearmente indipendenti.

Alcuni possibili membri di Λ: