Lezione 22 dicembre 2023

venerdì 22 dicembre 2023 10:07

10, 11, 12 / 1 2024

in orario lezioni RICEVIMENTO

11/1 11-14 SIMULAZIONE SCRITTO

ENDOMORFISMI AUTOAGGIUNTI
o SIMMETRICI

Def.: Sia V sp. euclideo opp. unitario

$f : V \to V$ endom. è

AUTOAGGIUNTO se $\forall v, w \in V$

vale

$$\boxed{\langle v, \underline{f(w)} \rangle = \langle \underline{f(v)}, \underline{\underline{w}} \rangle}$$

Es.: Molte trasformazioni di tipo MECCANICO (tensore di INERZIA, tensore di SFORZO)

oss: In particolare $\forall v \in V$

$$\langle v, f(v) \rangle = \langle f(v), v \rangle$$

in $\mathbb{R}$ vale comunque perché PS è simmetrico

ma su $\mathbb{C}$: $\langle v, f(v) \rangle = \overline{\langle f(v), v \rangle}$

$= \langle f(v), v \rangle$

$\iff \langle f(v), v \rangle \in \mathbb{R}$

Prop.: V sp. vett. euclideo, unitario, $\dim V = n$

$\boxed{\mathcal{B} \text{ base ORTONORMALE}}$

Allora $f : V \to V$ è autoaggiunto $\iff$

① $\mathbb{R}$: $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ è SIMMETRICA : ${}^t M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$

② $\mathbb{C}$: $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ è HERMITIANA : ${}^t M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \overline{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)}$

Dim. $\mathcal{B}$ ortonormale

$v, w \in V$; $x_v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ coord. di v

$y_w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ coord. di w

$$A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$$

Caso complesso:

f autoagg. $\iff \langle v, f(w) \rangle = \langle f(v), w \rangle$

$$\iff \underset{1 \times n}{{}^t \overline{x}_v} \cdot \underset{n \times 1}{\left(A \cdot y_w \right)} = \underset{1 \times n}{{}^t \left(\overline{A \cdot x_v} \right)} \cdot \underset{n \times 1}{y_w}$$

$$\underbrace{{}^t \overline{x}_v} \cdot A \cdot \underbrace{y_w} = {}^t \overline{x}_v \cdot {}^t \overline{A} \cdot y_w$$

in particolare

$${}^t \overline{e_i} \cdot A \cdot e_j = {}^t \overline{e_i} \cdot {}^t \overline{A} \cdot e_j$$

$\|$

$$\underbrace{{}^te_i \cdot A \cdot e_j}_{= A_{ij}} = \underbrace{{}^te_i \cdot {}^t\bar{A} \cdot e_j}_{({}^t\bar{A})_{ij}}$$

$$\boxed{{}^te_1 \cdot A \cdot e_2} = \underbrace{(1\ 0 \cdots 0) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(a_{11}\ a_{12} \cdots a_{1n}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_{12}$$

$$= A_{(1)}$$

$$\Longrightarrow A = {}^t\bar{A} \quad \Longrightarrow \quad {}^tA = {}^t({}^t\bar{A}) = \bar{A}$$

$\Longrightarrow$ A hermitiana su $\mathbb{C}$

$$A \in M_n(\mathbb{R}) \Rightarrow {}^tA = \bar{A} = A$$

A simmetrica su $\mathbb{R}$

Proposizione:

① $f: V \to V$ autoagg., V sp. unitario (su $\mathbb{C}$).

Allora ogni autovalore di f è REALE.

② $f: V \to V$ autoagg., V sp. euclideo o unitario

Allora: autovettori relativi a autovalori diversi sono ORTOGONALI.

Dim. ① Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore per f

$\boxed{v \neq 0_V}$ autovettore rel. a λ

f autoagg.:

$$\langle v, f(v) \rangle = \langle f(v), v \rangle$$

$$= \langle v, \lambda v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle$$

$$\lambda \cdot \langle v, v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle$$

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \underbrace{\langle v, v \rangle}_{\neq 0 \text{ perché } v \neq 0_V} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda - \bar{\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

② $\lambda \neq \mu$ autovalori

v, w autovettori : $f(v) = \lambda v$

$f(w) = \mu w$

$$\langle v, f(w) \rangle = \langle f(v), w \rangle$$

$$\langle v, \mu w \rangle = \langle \lambda v, w \rangle$$

$$\mu \langle v, w \rangle = \boxed{\bar{\lambda}} \langle v, w \rangle$$

λ reale

$$= \lambda \langle v, w \rangle$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\mu - \lambda)}_{\neq 0} \langle v, w \rangle = 0$$

$\mu \neq \lambda \quad \rightarrow \quad \langle v, w \rangle = 0$

TEOREMA SPETTRALE PER END. AUTOAGG.

V sp. euclideo o unitario; $\dim V = n$.

$f: V \rightarrow V$ autoaggiunto

Allora: $\exists\, \mathcal{B}$ base ortonormale di autovettori

(che quindi diagon. f, cioè $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \underset{\text{diagonale}}{D}$)

Dim.: Caso $\mathbb{C}$:

Per induzione su $n = \dim V$

- $n = 1$; sia $\mathcal{B} = \{v_1\}$, $v_1 \in V \setminus \{0_V\}$
  t.c. $\|v_1\| = 1$ (ottenuto cons. $\dfrac{v_1}{\|v_1\|}$)

  $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = (a_{11})$ è diagonale

- Supp. tesi vera per $n-1$, e cons. n :

su $\mathbb{C}$, f ha almeno 1 autovalore λ per Teo.

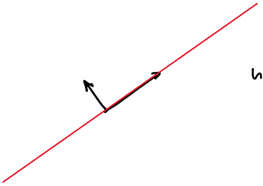
Fond. Alg., e quindi autovettore $v_1 \neq 0_V$;

posso supp. $\|v_1\| = 1$: $f(v_1) = \lambda \cdot v_1$

$\text{Span}(v_1)$; $\left(\text{Span}(v_1)\right)^\perp =: W$

$W = \{ v \in V : \langle u, v \rangle = 0 \ \ \forall u \in \text{Span}(v_1) \}$

$= \{ v \in V : \langle v_1, v \rangle = 0 \}$



visto: $V = \text{Span}(v_1) \oplus \underbrace{\left(\text{Span}(v_1)\right)^\perp}_{= W}$

$\dim W = \dim V - \dim \text{Span}(v_1) = n - 1$

Per applicare ipotesi induttiva, cons. $f|_W$ restrizione di f a W:

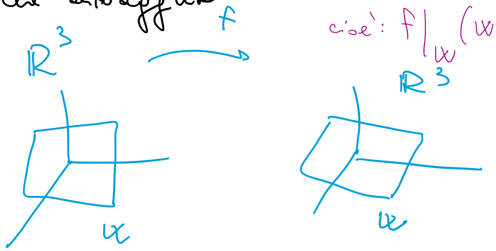
$f|_W : W \longrightarrow V$

$f|_W(w) = f(w)$

devo verificare che $\underbrace{f|_W \text{ è endo di } W}$

e che autoaggiunto

cioè: $f|_W(W) \subseteq W$



$f|_W(W) = f(W) \subseteq W \iff$

$\forall w \in W \Rightarrow f(w) \in W$

$\overset{\shortparallel}{\left(\text{Span}(v_1)\right)^\perp}$ =

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\langle v_1, w\rangle = 0}$

cons. $\underbrace{\langle v_1, f(w)\rangle}_{=0} \underset{\downarrow}{=} \langle f(v_1), w\rangle = \langle \lambda v_1, w\rangle$

f autoagg.

$$\overset{!}{=} \bar{\lambda}\cdot\langle v_1, w\rangle$$

$$= \lambda \underbrace{\langle v_1, w\rangle}_{=0} = 0$$

$\Rightarrow f(W) \subseteq W$

Di fatto $f|_W : W \longrightarrow W$, $\dim W = n-1$

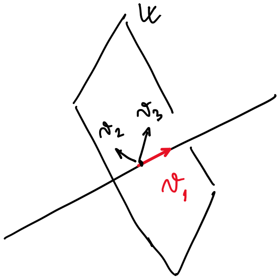
è autoagg.? $\langle w_1, f|_W(w_2)\rangle = \langle w_1, f(w_2)\rangle = \langle f(w_1), w_2\rangle \overset{!}{=} \langle f|_W(w_1), w_2\rangle$

$w_1, w_2 \in W$

$\Rightarrow \exists$ base B' ortonormale di W di autovettori per $f|_W$ $\Rightarrow$ autovettori per f

$\{v_2, \dots, v_n\}$: $f|_W(v_2) = \lambda_2 v_2$

$= f(v_2) = \lambda_2 v_2$



Pongo $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

vettori ortonormali, autovettori per f

$$V = \mathrm{Span}(v_1) \oplus W$$

$$\{v_1\} \qquad \{v_2, \dots, v_n\}$$

$\Rightarrow$ l'unione di basi è base di V.

CASO REALE : su $\mathbb{R}$

$f: V \to V$ autoagg.

Sia $\mathcal{C}$ base ortonormale qualunque di V ($\exists$ per GS)

Cons. $A = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$; f autoagg.
$\mathcal{C}$ ortonormale
$\Rightarrow A = {}^tA$

in particolare $A \in M_n(\mathbb{R}) \subseteq M_n(\mathbb{C})$

$${}^tA = \bar{A} = A$$

A è hermitiana

Cons. $L_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$

$$L_A\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

A hermitiana $\Rightarrow L_A$ è AUTOAGG.
risp. a PS standard

$$\left.\begin{aligned} \langle z, L_A(w) \rangle &= {}^t\bar{z} \cdot (A \cdot w) = {}^t\bar{z} \cdot A \cdot w \\ \langle L_A(z), w \rangle &= {}^t\overline{(A \cdot z)} \cdot w = {}^t\bar{z} \cdot {}^t\bar{A} \cdot w \end{aligned}\right) =$$

${}^tA = \bar{A}$, ${}^t\bar{A} = {}^t({}^tA) = A$

Cons. gli autovalori di L_A : sono le radici di $p_A(x)$ e sono tutte reali

$$= \begin{cases} p_A(x) = (\lambda_1 - x) \cdots (\lambda_n - x) , \ \lambda_i \in \mathbb{R} \\ p_f(x) \end{cases}$$

f ha almeno 1 autovalore : λ_1

$\Rightarrow \exists \ v_1 \in V$ autovettore reale

$f(v_1) = \lambda_1 \cdot v_1 \qquad v_1 \in V$

Ora si continua esattamente come nel caso $\mathbb{C}$.

COROLLARIO: TEOREMA SPETTRALE PER MATRICI SIMMETRICHE

① $A = {}^tA \in M_n(\mathbb{R})$

($\Rightarrow L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è autoagg. risp. a PS standard)

$\Rightarrow$ A è simile a D diagonale.

② ${}^tA = \bar{A} \in M_n(\mathbb{C})$

($\Rightarrow L_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ è autoag. risp. PS standard)

$\Rightarrow$ A è simile a D diagonale

OSS: In $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{E}$ base canonica è ORTONORM. risp. PS standard

Sia $\mathcal{B}$ base ortonormale risp. PS standard

cons. $M = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(Id_{\mathbb{R}^n})$: colonne sono $v_1, \dots, v_n$

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$, $v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \dots, v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow$ $M^{-1} = {}^tM$ (visto ieri M è ORT $\Longleftrightarrow$ le sue colonne sono base ORTONORM.)

M è matrice ORTOGONALE

$$\Longrightarrow \quad M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}^n}) = \left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(Id_{\mathbb{R}^n})\right)^{-1}$$

$$= M^{-1} = {}^tM$$

$\Longrightarrow$ A simmetrica $\Longrightarrow$ $\exists\ \mathcal{B}$ ort. di $\mathbb{R}^n$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(L_A) = D = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(Id)\, M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(L_A) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(Id)$$

$$= {}^tM \cdot A \cdot M$$

$${}^tM \cdot A \cdot M = D$$

Tanti cari auguri di un sereno
Natale e Anno Nuovo
2024!
Valentina Beorchia