PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI MATEMATICA
Anno accademico 2023/2024 – STAN
SIMULAZIONE DEL 18.12.2023

1. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

$$\frac{x^3-7x+5}{x\sin x}\,, \qquad \sinh(\cosh(x))\,, \qquad \sqrt{x+2}\,\tan(3-7x^2)\,.$$

Svolgimento. La prima: pongo $h(x) = \dfrac{x^3-7x+5}{x\sin x}$, $f(x) = x^3-7x+5$ e $g(x) = x\sin x$, per cui $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Allora

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \\ &= \frac{(3x^2-7)(x\sin x)-(x^3-7x+5)(1\cdot\sin x + x\cos x)}{(x\sin x)^2} \\ &= \frac{(2x^3-5)\sin x-(x^3-7x+5)x\cos x}{x^2\sin^2 x}\,. \end{aligned}$$

La seconda: pongo $h(x) = \sinh(\cosh(x))$, $f(x) = \cosh(x)$ e $g(y) = \sinh(y)$, per cui $h(x) = g(f(x))$. Allora

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x) = \cosh(f(x))f'(x) = \cosh(\cosh(x))\sinh(x)\,.$$

La terza: pongo $h(x) = \sqrt{x+2}\,\tan(3-7x^2)$, $f(x) = \sqrt{x+2}$ e $g(x) = \tan(3-7x^2)$, per cui $h(x) = f(x)g(x)$. Allora

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \\ &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\cdot 1\right)\tan(3-7x^2) + \sqrt{x+2}\left(\frac{1}{\cos^2(3-7x^2)}\right)(-14x) \\ &= \frac{\tan(3-7x^2)}{2\sqrt{x+2}} - \frac{14x\sqrt{x+2}}{\cos^2(3-7x^2)}\,. \end{aligned}$$

2. Trovare le primitive delle seguenti funzioni:

$$\sqrt{1-6x}\,, \qquad 4\tan\left(\frac{x}{2}\right) + x^2e^{x^3}\,.$$

Svolgimento. La prima: scrivo $\sqrt{1-6x} = (1-6x)^{\frac{1}{2}}$ e, tenendo conto del fatto che la derivata di $(1-6x)$ è uguale a -6, ho che

$$\int (1-6x)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{-6}\,\frac{(1-6x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{(1-6x)^3}}{9}\,.$$

La seconda: uso le formule di limearit e mi ricordo che una primitiva di $\tan x$ è $-\ln(\cos x)$ e la derivata di $\frac{x}{2}$ è uguale a $\frac{1}{2}$, per cui

$$\begin{aligned}\int \left(4\tan\left(\frac{x}{2}\right) + x^2 e^{x^3}\right) dx &= 4\int \tan\left(\frac{x}{2}\right) dx + \int x^2 e^{x^3}\, dx \\ &= -8\ln\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}e^{x^3} + c\,.\end{aligned}$$

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{(x+2)^3}\, dx\,.$$

<u>Svolgimento</u>. Trovo dapprima una primitiva; scrivendo $\dfrac{1}{(x+2)^3} = (x+2)^{-3}$, ho che, siccome la derivata di $x+2$ è uguale a 1,

$$\int (x+2)^{-3}\, dx = \frac{(x+2)^{-3+1}}{-3+1} + c = -\frac{1}{2(x+2)^2} + c\,.$$

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x+3}\,.$$

<u>Svolgimento</u>. Essa è definita se $x \neq -3$, ossia sul dominio

$$]-\infty, -3[\,\cup\,]-3, +\infty[\,.$$

Osservo che se x si avvicina a -3 da destra, il numeratore ha circa valore 8, quindi positivo, mentre il denominatore è positivo e tende a 0. Quindi i valori saranno molto grandi e positivi se x è vicino a -3, con $x > -3$. Se invece x si avvicina a -3 da sinistra, il numeratore ha sempre circa valore 8, quindi positivo, mentre il denominatore è negativo e tende a 0. Quindi i valori saranno molto grandi e negativi se x è vicino a -3, con $x < -3$.

Studiamo il segno della funzione. Vedo che

$$x^2 - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -1 \;\text{ o }\; x > 1\,.$$

mentre

$$x + 3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -3\,.$$

Ne segue che

$$f(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } x < -3\,, \\ > 0 & \text{se } -3 < x < -1\,, \\ < 0 & \text{se } -1 < x < 1\,, \\ > 0 & \text{se } x > 1\,. \end{cases}$$

Calcoliamone la derivata:

$$f'(x) = \frac{2x(x+3) - (x^2-1)\cdot 1}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x+1}{(x+3)^2}\,.$$

Il suo segno dipende solo dal segno del numeratore, essendo il denominatore sempre positivo. Vedo che

$$x^2 + 6x + 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -3 - \sqrt{8} \ \text{ o } \ x > -3 + \sqrt{8}\,.$$

Essendo $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, ne deduciamo che

$$f \text{ è } \begin{cases} \text{strettamente crescente su }]-\infty,\, -3 - 2\sqrt{2}[\,, \\ \text{strettamente decrescente su }]-3 - 2\sqrt{2}\,, -3[\,, \\ \text{strettamente decrescente su }]-3\,, -3 + 2\sqrt{2}[\,, \\ \text{strettamente crescente su }]-3 + 2\sqrt{2}\,, +\infty[\,. \end{cases}$$

La funzione ha in $-3 - 2\sqrt{2}$ un punto di massimo locale, con valore

$$f(-3 - 2\sqrt{2}) = -6 - 4\sqrt{2} \approx -11,66\,,$$

ed essa ha in $-3 + 2\sqrt{2}$ un punto di minimo locale, con valore

$$f(-3 + 2\sqrt{2}) = -6 + 4\sqrt{2} \approx -0,34\,.$$

Calcoliamo ora la derivata seconda di f:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2x+6)(x+3)^2 - (x^2+6x+1)2(x+3)}{(x+3)^4} \\ &= \frac{(2x+6)(x+3) - 2(x^2+6x+1)}{(x+3)^3} \\ &= \frac{16}{(x+3)^3}\,. \end{aligned}$$

Notiamo che

$$f''(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } x < -3\,, \\ > 0 & \text{se } x > -3\,, \end{cases}$$

per cui

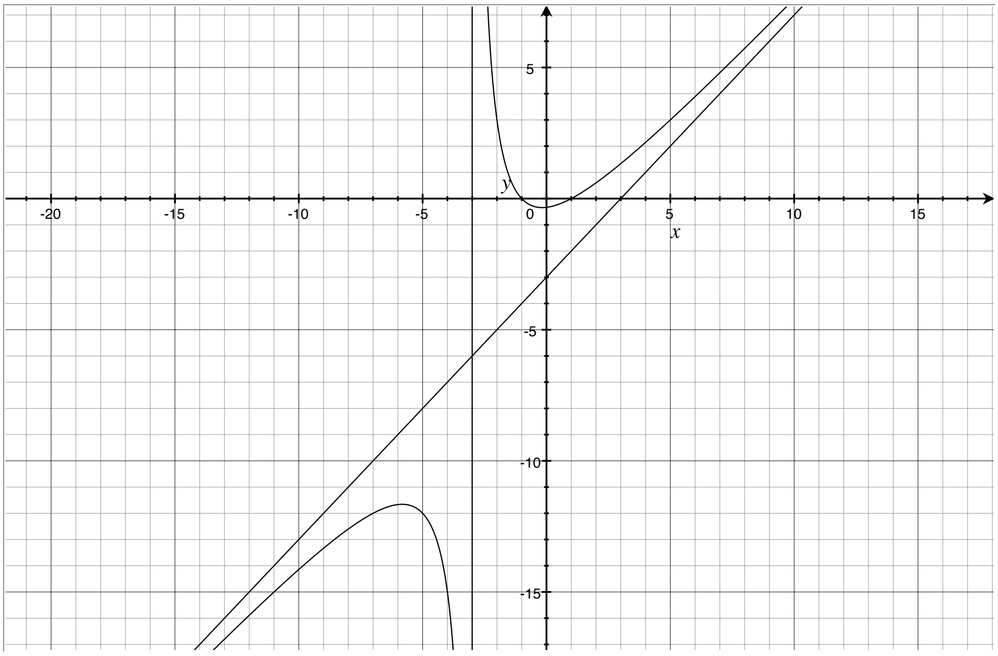
$$f \text{ è } \begin{cases} \text{strettamente concava su }]-\infty,\, -3[\,, \\ \text{strettamente convessa su }]-3 - +\infty[\,. \end{cases}$$

Cos'altro fare? Si potrebbe cercare se c' un asintoto a $+\infty$ o a $-\infty$. Lasciamo ai volenterosi verificare che effettivamente esiste, è la retta di equazione $y = x - 3$, la stessa sia a $+\infty$ che a $-\infty$. Inoltre, si potrebbe verificare che il grafico è simmetrico rispetto al punto $(-3, -6)$. Basta verificare che la funzione

$$g(x) = f(x-3) - 6$$

è dispari.

Possiamo infine disegnare il grafico di f.



5. Scrivere il numero complesso

$$\frac{7+3i}{2-5i}$$

nella forma usuale $a + ib$, con a e b in $\mathbb{R}$.

Svolgimento. Con il solito trucco del "moltiplica e dividi per..." abbiamo che

$$\begin{aligned}\frac{7+3i}{2-5i} &= \frac{7+3i}{2-5i}\,\frac{2+5i}{2+5i} \\ &= \frac{14+35i+6i+15i^2}{2^2-(5i)^2} \\ &= \frac{-1+41i}{4+25} \\ &= -\frac{1}{29}+i\,\frac{41}{29}\,.\end{aligned}$$