PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI MATEMATICA
Anno accademico 2023/2024 – STAN
SIMULAZIONE DEL 02.01.2024

1. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

$$5x^3 - 2x^2 \sin x\,, \qquad \frac{e^{x^2+1}}{x+2}\,, \qquad \sinh\left(\frac{1}{2x^4}\right).$$

Svolgimento. La prima: la derivata di x^3 è $3x^2$, mentre la derivata di $x^2 \sin x$ è $2x \sin x + x^2 \cos x$. Quindi,

$$D(5x^3 - 2x^2 \sin x) = 5Dx^3 - 2D(x^2 \sin x) = 15x^2 - 4x \sin x - 2x^2 \cos x\,.$$

La seconda: la derivata di e^{x^2+1} è $e^{x^2+1} \cdot 2x$, mentre quella di $x+2$ è 1. Quindi,

$$D\frac{e^{x^2+1}}{x+2} = \frac{De^{x^2+1} \cdot (x+2) - e^{x^2+1} \cdot D(x+2)}{(x+2)^2} = e^{x^2+1}\frac{2x^2+4x-1}{(x+2)^2}\,.$$

La terza: la derivata di x^{-4} è $(-4)x^{-5}$, mentre la derivata di sinh è cosh. Allora,

$$D\sinh\left(\frac{1}{2x^4}\right) = \cosh\left(\frac{1}{2x^4}\right) \cdot D\left(\frac{1}{2x^4}\right) = -2\cosh\left(\frac{1}{2x^4}\right) \cdot \frac{1}{x^5}\,.$$

2. Trovare le primitive delle seguenti funzioni:

$$\sqrt[4]{x^5}\,, \qquad x^4 \cos(x^5)\,.$$

Svolgimento. La prima:

$$\int \sqrt[4]{x^5}\,dx = \int x^{\frac{5}{4}}\,dx = \frac{x^{\frac{5}{4}+1}}{\frac{5}{4}+1} + c = \frac{4}{9}x^{\frac{9}{4}} + c = \frac{4}{9}\sqrt[4]{x^9} + c\,.$$

La seconda:

$$\int x^4 \cos(x^5)\,dx = \frac{1}{5}\int \cos(x^5) \cdot 5x^4\,dx = \frac{1}{5}\sin(x^5) + c\,.$$

3. Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx\,, \qquad \int_0^1 x^2 \cosh(x^3)\,dx\,.$$

Svolgimento. Il primo: essendo $\tan x$ una funzione dispari e $[-\frac{\pi}{4}\,, \frac{\pi}{4}]$ un intervallo simmetrico rispetto all'origine, l'integrale è uguale a 0.

Il secondo: trovo dapprima una primitiva:

$$\int x^2 \cosh(x^3)\, dx = \frac{1}{3} \int \cosh(x^3) \cdot 3x^2\, dx = \frac{1}{3} \sinh(x^3) + c\,.$$

Quindi, usando il Teorema Fondamentale,

$$\int_0^1 x^2 \cosh(x^3)\, dx = \frac{1}{3} \sinh(1^3) - \frac{1}{3} \sinh(0^3) = \frac{1}{3} \sinh(1)\,.$$

4. Studiare la funzione

$$f(x) = x^2 e^{-x}.$$

Svolgimento. La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$. Inoltre, essa è sempre positiva, tranne per $x = 0$, in cui $f(0) = 0$. Vediamo subito la derivata:

$$f'(x) = 2xe^{-x} + x^2 e^{-x} \cdot (-1) = (2x - x^2)e^{-x}\,.$$

Si ha che

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } x < 0 \text{ o } x > 2\,, \\ > 0 & \text{se } 0 < x < 2\,, \end{cases}$$

per cui

$$f \text{ è } \begin{cases} \text{strettamente decrescente su }]-\infty, 0[\text{ e su }]2, +\infty[\,, \\ \text{strettamente crescente su }]0, 2[\,. \end{cases}$$

La funzione presenta pertanto un punto di massimo locale in $x = 2$, con valore $f(2) = 4e^{-2}$. Vediamo la derivata seconda:

$$f''(x) = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}.$$

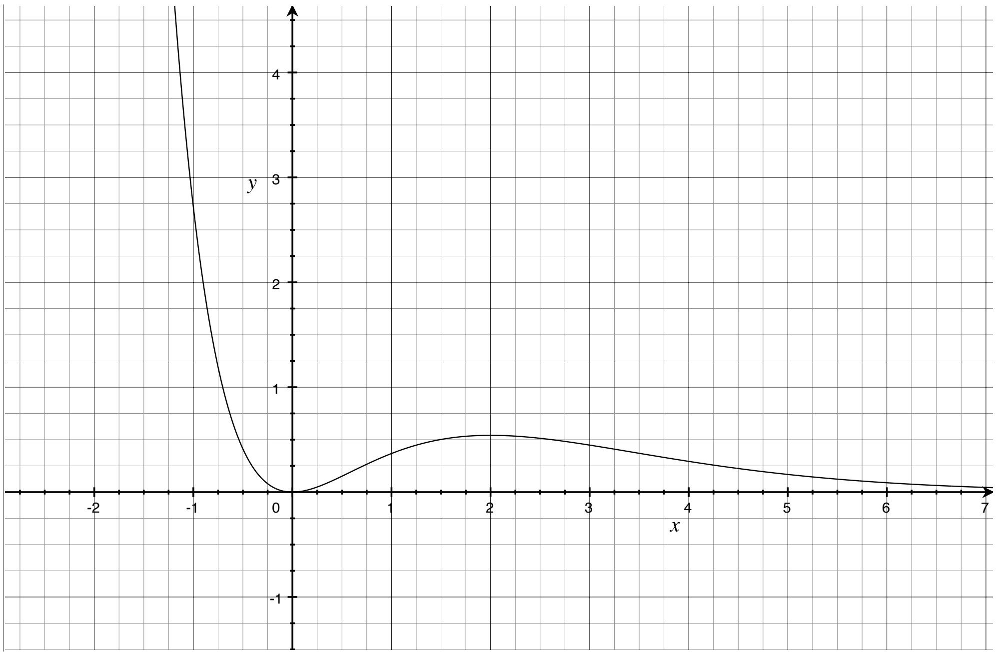
Il suo segno:

$$f''(x) \begin{cases} > 0 & \text{se } x < 2 - \sqrt{2} \text{ o } x > 2 + \sqrt{2}\,, \\ > 0 & \text{se } 2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}\,, \end{cases}$$

per cui

$$f \text{ è } \begin{cases} \text{strettamente convessa su }]-\infty\,, 2 - \sqrt{2}[\text{ e su }]2 + \sqrt{2}\,, +\infty[\,, \\ \text{strettamente concava su }]2 - \sqrt{2}\,, 2 + \sqrt{2}[\,. \end{cases}$$

Possiamo disegnarne il grafico.



4
3
2
1
-1
y
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
x