# ESERCIZI SU GEOMETRIA DELLO SPAZIO
# ALGEBRA LINEARE ED ELEMENTI DI GEOMETRIA
# MATEMATICA PER L'ECONOMIA E LA STATISTICA 2
# A.A. 2023/24

## Esercizio 1

Dati i seguenti punti $Q$ e le seguenti equazioni cartesiane di piani $\pi$ in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, **determina** un'equazione cartesiana del piano passante per $Q$ e parallelo a $\pi$:

(i) $Q = (1, 1, 0)$ e $\pi\colon 3x - 2y + z = 1$;
(ii) $Q = (-1, 0, 2)$ e $\pi\colon x + 4y + 2z = -2$;
(iii) $Q = (0, 0, 0)$ e $\pi\colon 2x - 7y + 3x = 0$.

*Risoluzione.*

(i) Un primo modo per risolvere questo esercizio è notare che tutti e soli i piani paralleli al piano $\pi$ di equazione cartesiana $3x-2y+z = 1$ hanno equazione cartesiana della forma $3x - 2y + z = d$ per un qualche $d \in \mathbb{R}$. Affinché il piano di equazione $3x - 2y + z = d$ passi per $Q = (1, 1, 0)$ deve essere che

$$3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 0 = d$$

ovvero $d = 1$. Pertanto il piano cercato è quello di equazione cartesiana $3x - 2y + z = 1$. Notiamo che tale piano coincide con quello di partenza, e questo vale perché $Q \in \pi$.

Un secondo modo per risolvere questo esercizio è cominciare determinando la giacitura di $\pi$. Per farlo, calcoliamo una base del sottospazio vettoriale $W$ delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato all'equazione cartesiana di $\pi$, ovvero

$$3x - 2y + z = 0\,.$$

Effettuando i calcoli, si trova che una base di $W$ è data ad esempio da $\{v_1, v_2\}$, dove

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Pertanto, il piano cercato è quello passate per $Q$ e di giacitura $W$, che ha quindi equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + t_1 \\ y = 1 + t_2 \\ z = -3t_1 + 2t_2 \end{cases}$$

## Esercizio 2

Due rette $r$ ed $s$ di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si dicono *complanari* se esiste un piano $\pi$ di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ che le contiene entrambe, ovvero se $r \subseteq \pi$ e $s \subseteq \pi$.

In ciascuno dei seguenti casi, **determina** se le rette $r$ ed $s$ siano o meno complanari.

(i)
$$r\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 8 - t \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} x = 1 - \tau \\ y = 3 + \tau \\ z = 5\tau \end{cases}$$

(ii)
$$r\colon \begin{cases} x = 6 + 2t \\ y = 3 + 2t \\ z = 2t \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} x = \tau \\ y = \tau \\ z = \tau \end{cases}$$

(iii)
$$r\colon \begin{cases} x = 6 \\ y = 1 - 2t \\ z = 8 - t \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} x = \tau \\ y = -5 + \tau \\ z = 2 + \tau \end{cases}$$

*Risoluzione.*

(i) Verifichiamo innanzitutto se $r$ ed $s$ abbiano o meno un punto in comune. Per farlo, verifichiamo se il sistema lineare in $t$ e $\tau$
$$\begin{cases} 1 + t = 1 - \tau \\ 2t = 3 + \tau \\ 8 - t = 5\tau \end{cases}$$
abbia o meno soluzioni. Il sistema può essere riscritto come
$$\begin{cases} t + \tau = 0 \\ 2t - \tau = 3 \\ -t + 5\tau = -8 \end{cases}$$
le cui matrice dei coefficienti e matrice completa sono
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad (A|b) = \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -8 \end{array}\right)$$
Si può verificare che il rango di $A$ è 2, mentre il rango di $(A|b)$ è 3, pertanto le due rette non sono incidenti. L'unica modo dunque in cui $r$ ed $s$ possano essere complanari è che siano parallele (e distinte). Questo sarebbe vero se le loro giaciture fossero uguali. Le loro giaciture sono generate, rispettivamente, dai vettori
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Se le due giaciture fossero uguali, i due vettori precedenti sarebbero proporzionali, il che non è il caso. Pertanto le due rette non sono né incidenti, né parallele, e dunque sono sghembe.

## Esercizio 3

**Determina** un'equazione cartesiana del piano in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ contenente la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2y + 3z = 4 \end{cases}$$

e parallelo alla retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

*Risoluzione.* Determiniamo vettori $v_1$ e $v_2$ tali per cui le giaciture delle due rette siano $\mathrm{span}(v_1)$ e $\mathrm{span}(v_2)$. Se $v_1$ e $v_2$ sono linearmente indipendenti, allora la giacitura del piano cercato deve essere $\mathrm{span}(v_1, v_2)$. Se $v_1$ e $v_2$ non fossero linearmente indipendenti, allora ci sarebbero due situazioni possibili: o le due rette sono coincidenti (in tal caso un qualsiasi piano passante per esse è una risposta appropriata), oppure le due rette sono parallele e distinte (in tal caso, preso $Q$ un punto su una retta e $Q'$ un punto sull'altra, avremmo che la giacitura cercata sarebbe $\mathrm{span}(v_1, \vec{QQ'})$.

Risolvendo il sistema lineare omogeneo associato al sistema della equazioni cartesiane della prima retta troviamo

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mentre dalla parametrizzazione della seconda retta troviamo

$$v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dato che $v_1$ e $v_2$ sono linearmente indipendenti, allora la giacitura del piano cercato è $W = \mathrm{span}(v_1, v_2)$. A questo punto, è sufficiente determinare un punto sulla prima retta, come ad esempio $Q = (1, 2, 0)$, per ottenere che il piano desiderato è quello passante per $Q$ e di giacitura $W$. Una sua equazione cartesiana è quindi data da

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 2 & x-1 \\ -3 & -2 & y-2 \\ 2 & 1 & z \end{pmatrix} = 0\,,$$

ovvero

$$x + y = 3\,.$$

## Esercizio 4

Per ogni valore del parametro $a \in \mathbb{R}$, **determina** equazioni parametriche e cartesiane della retta $r_a \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ passante per i punti $P = (1, 1, 1)$ e $Q = (2, 0, a)$.

**Determina** poi il valore di $a$ tale per cui la retta $r_a$ è parallela al piano $\pi$ di equazione cartesiana $2x - y + 3z = 1$.

*Risoluzione.* Equazioni parametriche della retta $r_a$ sono date da

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + (a-1)t \end{cases}$$

Equazioni cartesiane sono ottenute considerando la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ -1 & y-1 \\ a-1 & z-1 \end{pmatrix}$$

ed effettuando la sua gradinizzazione, ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ 0 & x+y-2 \\ 0 & (1-a)x+z+a-2 \end{pmatrix}$$

Equazioni cartesiane sono quindi

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ (1-a)x + z = -a + 2 \end{cases}$$

Ora, la giacitura del piano $\pi$ è data da

$$\mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Vale che la retta $r_a$ è parallela al piano $\pi$ se e solo se

$$\mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a-1 \end{pmatrix}) \subset \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Quest'ultima condizione è soddisfatta se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & a-1 \end{pmatrix} = 0\,.$$

Ciò equivale a

$$a = 0\,.$$

Per tale valore dunque la retta $r_a$ è parallela a $\pi$.

## Esercizio 5

Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo, in dipendenza dal parametro $a \in \mathbb{R}$, i tre punti

$$P = (0,-1,1)\,, \quad Q = (0,1,1)\,, \quad R_a = (a,0,0)\,.$$

Per ogni $a \in \mathbb{R}$, **determina** il piano $\pi_a \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ passante per $P$, $Q$ e $R_a$.

A questo punto, **decidi** se esistano valori di $a$ tali per cui il piano $\pi_a$ sia parallelo alla retta $r \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ di equazioni cartesiane

$$r\colon \begin{cases} y = 3 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

*Risoluzione.* Un'equazione cartesiana del piano $\pi_a$ per $P$, $Q$ ed $R_a$ è data da

$$\det \begin{pmatrix} 0 & a & x-a \\ -1 & -1 & y \\ 0 & -1 & z \end{pmatrix} = 0$$

(dove le prime due colonne sono i vettori $\frac{1}{2}\vec{QP}$ e $\vec{R_aQ}$), ovvero

$$x + az = a\,.$$

La giacitura del piano $\pi_a$ è data da

$$\operatorname{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix})$$

La giacitura della retta $r$ è data da

$$\operatorname{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix})\,.$$

Il piano $\pi_a$ è parallelo alla retta $r$ se e solo se

$$\operatorname{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}) \subset \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix})$$

e quest'ultima condizione è soddisfatta se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0\,.$$

L'ultima condizione si riscrive come

$$-1 + a = 0$$

il che mostra che solo e soltanto per $a = 1$ il piano $\pi_a$ è parallelo a $r$.

## Esercizio 6

Nello spazio $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, consideriamo in dipendenza del parametro $a \in \mathbb{R}$ le rette

$$r\colon \begin{cases} x + 2y = a \\ z = 0 \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$$

**Decidi** se esistano valori di $a$ tale per cui $r$ ed $s$ sono complanari. In tal caso, **decidi** se per tali valori le rette siano incidenti o meno.

*Risoluzione.* Calcoliamo innanzitutto le giaciture delle due rette. Esse sono ottenute risolvendo i sistemi lineari omogenei associati alle equazioni cartesiane delle due rette. Abbiamo quindi che la giacitura $W_r$ di $r$ è

$$\operatorname{span}(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$$

mentre la giacitura $W_s$ di $s$ è

$$\operatorname{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix})$$

Dato che le giaciture sono distinte (i vettori che generano le giaciture non sono proporzionali), le due rette non sono mai parallele, indipendentemente dal valore di $a$. Pertanto, le rette $r$ ed $s$ sono complanari se e solo se sono incidenti. Ora, quest'ultima condizione è verificata se e solo se il sistema lineare ottenuto giustapponendo le equazioni cartesiane delle rette

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ z = 0 \\ x - y = 1 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$$

è compatibile. Effettuando la gradinizzazione della matrice completa di questo sistema abbiamo che esso è equivalente a

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ y = \frac{1}{2}a \\ z = 0 \\ 0 = 1 + \frac{1}{2}a \end{cases}$$

Il precedente sistema è compatibile se e solo se $1 + \frac{1}{2}a = 0$, ovvero $a = -2$. Per tale valore, dunque, le due rette sono complanari e incidenti.

## Esercizio 7

Nello spazio $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, consideriamo i punti

$$P = (1, 1, 0) \quad \text{e} \quad P' = (1, 2, 3)$$

e in $\mathbb{R}^3$ consideriamo i vettori

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sia $r \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ la retta passante per $P$ e con giacitura $\operatorname{span}(v)$ e sia $r' \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ la retta passante per $P'$ e con giacitura $\operatorname{span}(v')$.

**Dimostra** che $r$ ed $r'$ sono sghembe.

**Determina** due piani paralleli $\pi$ e $\pi'$ tali che $r \subseteq \pi$ ed $r' \subseteq \pi'$.

*Risoluzione.* Dal momento che i vettori $v$ e $v'$ non sono proporzionali, le due rette non possono essere parallele. Pertanto, per mostrare che $r$ ed $r'$ sono sghembe è sufficiente mostrare che non sono incidenti. Questo si traduce nel mostrare che il sistema lineare

$$\begin{cases} 1+2t = 1+\tau \\ 1-t = 2+3\tau \\ \sqrt{2}t = 3+2\tau \end{cases}$$

nelle variabili $t$ e $\tau$ non ha soluzioni. Questo è effettivamente vero per il teorema di Rouché-Capelli, che si può applicare una volta scritto il sistema nella forma

$$\begin{cases} 2t-\tau = 0 \\ t+3\tau = -1 \\ \sqrt{2}t-\tau = 3 \end{cases}$$

Pertanto le due rette sono sghembe.

Per trovare i due piani paralleli $\pi$ e $\pi'$, notiamo che la loro giacitura comune deve essere necessariamente

$$W = \operatorname{span}(v, v')$$

dal momento che $\pi$ deve contenere $r$ e $\pi'$ deve contenere $r'$. Quindi $\pi$ è il piano passante per $P$ e di giacitura $W$, mentre $\pi'$ è il piano passante per $P'$ di giacitura $W$.