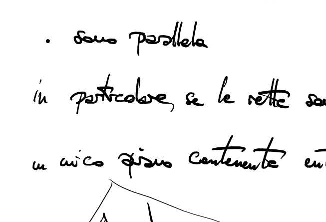
Complanarità

Def: due rette $r, s \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si dicono complanari se esiste un piano $\pi \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ che le contiene entrambe, ovvero $r \subseteq \pi$ ed $s \subseteq \pi$.

Oss: due rette $r, s \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono complanari se e solo se:
- sono incidenti, oppure
- sono parallele

in particolare, se le rette sono complanari e distinte, allora esiste un unico piano contenente entrambe




Supponiamo che r ed s siano incidenti e sia

r: passante per Q e di giacitura $\mathrm{span}(v)$

s: passante per Q' e di giacitura $\mathrm{span}(v')$

Se $r \neq s$, allora v e v' sono linearmente indipendenti e dunque l'unico piano π passante per r ed s è il piano

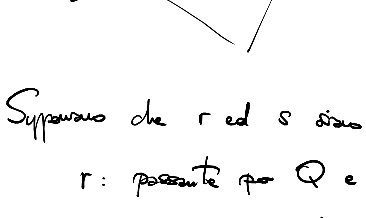
π: passante per Q (o Q') e di giacitura $\mathrm{span}(v, v')$.

Supponiamo invece che r ed s siano parallele, con:

r passante per Q e di giacitura $\mathrm{span}(v)$

s passante per Q' e di giacitura $\mathrm{span}(v')$

Dato che r ed s sono parallele vale che $\mathrm{span}(v) = \mathrm{span}(v')$. Se $r \neq s$, allora esiste un unico piano π contenente entrambe.



Se $r \neq s$, allora $\overrightarrow{QQ'}$ è un vettore non nullo il quale è linearmente indipendente da v e v'!

(infatti, se $\overrightarrow{QQ'}$ fosse linearmente dipendente da v e v', allora sarebbe proporzionale a ciascuno di essi, e quindi in particolare a v, dalla qual cosa otterremmo che $Q' \in r$, assurdo, per $r \parallel s$ ed $r \neq s$ dunque $r \cap s = \emptyset$)

Quindi il piano π è il piano passante per Q (o Q') e di giacitura $\mathrm{span}(v, \overrightarrow{QQ'})$.

Esempio: consideriamo le due rette:

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 2\tau \\ y = 3 - 2\tau \\ z = 1 + 2\tau \end{cases}$$

r ha giacitura $\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$; s ha giacitura $\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$

poiché le giaciture di r ed s sono uguali, le rette sono parallele; potrebbe essere che $r = s$; notiamo che $(0,3,1) \in s$; se fosse $r = s$, sarebbe $(0,3,1) \in r$; in tal caso il sistema

$$\begin{cases} 1 + t = 0 \\ 2 - t = 3 \\ t = 1 \end{cases}$$

avrebbe soluzione

dato che tale sistema non ha soluzione, $r \neq s$; quindi l'unico piano passante per r ed s è quello passante per $(0,3,1)$ e di giacitura $\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0-1 \\ 3-2 \\ 1-0 \end{pmatrix}\right)$

un'equazione cartesiana è data da

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & x-0 \\ -1 & 1 & y-3 \\ 1 & 1 & z-1 \end{pmatrix} = 0$$

Abbiamo detto che due rette $r, s \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono sghembe se non sono incidenti né parallele. Ne segue che per due rette sghembe non passa alcun piano. Vale però che esistono due piani π_r e π_s, paralleli tra loro, uno passante per r e l'altro passante per s. La giacitura di tali piani è $\mathrm{span}(v, v')$ dove $\mathrm{span}(v)$ è la giacitura di r e $\mathrm{span}(v')$ è la giacitura di s.

Prodotto scalare

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, di dimensione finita. In particolare, scegliamo $V = \mathbb{R}^n$. Dati due vettori $v, w \in \mathbb{R}^n$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

definiamo il prodotto scalare tra v e w come la quantità:

$$v \cdot w = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + \dots + v_n \cdot w_n.$$

(o anche $\langle v, w \rangle$)

Abbiamo quindi definito una funzione

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v, w &\longmapsto v \cdot w \end{aligned}$$

Il prodotto scalare è una applicazione bilineare:

$\forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n, \forall w \in \mathbb{R}^n$: $(v_1 + v_2) \cdot w = v_1 \cdot w + v_2 \cdot w$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}^n, \forall w \in \mathbb{R}^n$: $(\underbrace{\lambda \cdot v}_{\text{moltiplicazione per uno scalare}}) \cdot w = \lambda \cdot (v \cdot w)$

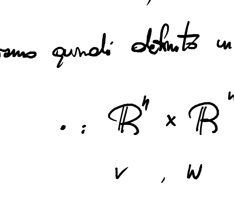
moltiplicazione in $\mathbb{R}$

prodotto scalare

prodotto scalare

(e valgono analoghe proprietà scambiando v e w).

Oss: sia $v \in \mathbb{R}^2$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, allora $v \cdot v = v_1^2 + v_2^2$



per il Teorema di Pitagora, $v \cdot v$ è il quadrato della lunghezza di v.

Def: se $v \in \mathbb{R}^n$, definiamo la norma di v come

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$$

Notiamo infatti che $v \cdot v \geq 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$.

Teorema: (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)

$\forall v, w \in \mathbb{R}^n$ vale che

$$|v \cdot w| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

prodotto scalare

valore assoluto

Cor: se $v, w \in \mathbb{R}^n$ vale che

$$-\|v\| \cdot \|w\| \leq v \cdot w \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

se, inoltre $v \neq 0$ e $w \neq 0$, allora $\|v\| > 0$ e $\|w\| > 0$

(infatti, se $v \neq 0$, allora $v \cdot v = v_1^2 + \dots + v_n^2$ e questa quantità è > 0)

quindi

$$-1 \leq \frac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1$$

pertanto la quantità $\frac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|}$ è il coseno di un certo angolo α, con $\alpha \in [0, \pi]$; quindi possiamo definire l'angolo tra v e w come quel numero $\alpha \in [0, \pi]$ tale che

$$\cos \alpha = \frac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

Quindi dato un prodotto scalare è possibile definire
- la norma dei vettori
- l'angolo tra coppie di vettori non nulli.

Oss. l'angolo tra v e w è di $\frac{\pi}{2}$ se e solo se

$$\frac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \iff v \cdot w = 0$$

Def. siano $v, w \in \mathbb{R}^n$; v e w si dicono ortogonali se $v \cdot w = 0$.

Def. sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbb{R}^n$; $\mathcal{B}$ si dice ortogonale se gli elementi di $\mathcal{B}$ sono a due a due ortogonali tra di loro.

Esempio: $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathcal{B}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$, infatti:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 + 0 \cdot 0 = 6 - 6 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 0 + (-2) \cdot 0 + 0(-1) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = 0$$

Def: sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbb{R}^n$; $\mathcal{B}$ si dice ortonormale se
- i. $\mathcal{B}$ è ortogonale
- ii. $\forall b \in \mathcal{B}$, vale che $\|b\| = 1$

(i vettori di norma 1 si dicono versori)

Esempio: la base standard $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^n$ è ortonormale:

$$\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$$

$e_i \cdot e_j = 0$ se e solo se $i \neq j$

$e_i \cdot e_i = 1$

Teorema: (teorema spettrale per matrici simmetriche)

sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ e supponiamo che A sia simmetrica, ovvero ${}^tA = A$; allora esiste una base ortonormale di autovettori per

$$\begin{aligned} L_A : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ v &\longmapsto A \cdot v \end{aligned}$$

(ovvero l'applicazione lineare L_A si può diagonalizzare con una base $\mathcal{B}$ che sia ortonormale, e dunque se $P = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbb{R}^n})$ vale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ è una matrice diagonale)

Esercizio: sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ e sia

$$B = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbb{R}^n})$$

calcolare ${}^tB \cdot B$.

Def. sia $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio vettoriale; definiamo l'ortogonale di W come

$$W^{\perp} = \{ v \in \mathbb{R}^n : v \cdot w = 0 \ \forall w \in W \}$$

Esercizio. mostrare che $W^{\perp}$ è un sottospazio vettoriale.

(questo segue dalle proprietà di bilinearità del prodotto scalare)

Esempio: consideriamo la seguente matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

calcoliamo il polinomio caratteristico di L_A

$$A - \lambda \cdot \mathbb{1}_3 = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -3 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda \cdot \mathbb{1}_3) = (2-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda) - 0 + (-3) \cdot (3(-1-\lambda)) =$$

$$= (-1-\lambda)\underbrace{\left[(2-\lambda)^2 - 9\right]}_{a^2 - b^2}$$

$$= (-1-\lambda)(2-\lambda+3)(2-\lambda-3)$$

$$= -(\lambda+1)(5-\lambda)(-\lambda-1) =$$

$$= -(\lambda+1)^2(\lambda-5)$$

abbiamo pertanto spettro di $L_A = \{-1, 5\}$

e $m_a(-1) = 2$, $m_a(5) = 1$

per calcolare una base di autovettori, determiniamo

$$Aut(-1) \quad \text{e} \quad Aut(5)$$

$Aut(-1)$: $A + \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

- $Aut(-1) = \ker\left(\text{applicazione lineare associata a } \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$

dobbiamo risolvere $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x - z = 0$$

$$Aut(-1) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ y \\ z \end{pmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

questi due vettori sono ortogonali

dunque $m_g(-1) = 2$