PROVA SCRITTA DI SISTEMI DINAMICI
A.A. 2020/2021

26 febbraio 2021

Nome e Cognome:	
gruppo:	Gruppo B
esercizio:	Esercizio 2

Note: Scrivere le risposte su un singolo foglio bianco usando penna nera. Non scrivere con inchiostro blu o a matita. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

Dichiaro che le risposte a questo esercizio sono frutto del mio e solo del mio lavoro e che non mi sono consultato con altri.

Soluzione

Domanda 2.1

Dato il sistema a tempo discreto

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= +x_2(k) \\ x_2(k+1) &= -x_1(k) + u(k) \\ y(k) &= x_1(k) \end{cases}$$

si chiede di determinare:

a
- le espressioni dei modi di risposta dell'evoluzione libera dello stato, a partire da uno stato iniziale generico $\bar{x}(0) = [\bar{x}_1(0)\ \bar{x}_2(0)]^T$.

b
- l'evoluzione libera dello stato del sistema a partire dallo stato iniziale $\bar{x}(0) = [+1\,,\ -1]^T$.

$\boxed{\text{Soluzione a}}$

Matrice A $\quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

polinomio caratteristico ed autovalori

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ +1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

autovalori distinti $\quad \lambda_1 = +j, \quad \lambda_2 = -j \quad |\lambda_{1,2}| = 1$

Dato che sono autovalori distinti, per trovare le matrici dei modi di risposta posso usare la formula di LZ-p22

$$A^k = \sum_{i=1}^{2} A_i \lambda_i^k \quad \begin{cases} \lambda_1 = +j \\ \lambda_2 = -j \end{cases}$$

$$A^k = \sum_{1}^{2} A_i \lambda_i^k \qquad \lambda_1 = +j \qquad \lambda_2 = -j$$

con

$$A_i = \lim_{z \to \lambda_i} \left[(z - \lambda_i)(zI - A)^{-1} \right]$$

Oppure si può fare uso dell'espressione in L2-p23

$$A_i = v_i \tilde{v}_i^T$$

v_i autovettore destro associato a λ_i

$\tilde{v}_i^T$ autovettore sinistro associato a λ_i

In questa bozza di soluzione si utilizza il 1° approccio →

→ utilizzare il 2° approccio come alternativa e confrontare la complessità dei calcoli

$$(zI - A) = \begin{bmatrix} z & -1 \\ +1 & z \end{bmatrix} \qquad \det(zI - A) = (z^2 + 1)$$

$$(zI - A)^{-1} = \frac{1}{(z^2+1)} \begin{bmatrix} z & -1 \\ +1 & z \end{bmatrix}^T =$$

$$= \frac{1}{(z^2+1)} \begin{bmatrix} z & +1 \\ -1 & z \end{bmatrix}$$

A questo punto:

$$A_1 = \lim_{z \to +j} \cancel{(z-j)} \frac{1}{(z+j)\cancel{(z-j)}} \begin{bmatrix} z & +1 \\ -1 & z \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2j} \begin{bmatrix} j & +1 \\ -1 & j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} j \\ \frac{1}{2} j & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \lim_{z \to -j} \cancel{(z+j)} \frac{1}{\cancel{(z+j)}(z-j)} \begin{bmatrix} z & +1 \\ -1 & z \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2j} \begin{bmatrix} -j & +1 \\ -1 & -j \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} j \\ -\frac{1}{2} j & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Considerato lo stato iniziale generico

$$\bar{x}(0) = \begin{bmatrix} \bar{x}_1(0) \\ \bar{x}_2(0) \end{bmatrix}$$

allora il movimento libero dello stato sarà

$$x_{free}(k) = A^k \bar{x}(0)$$

dove

$$A^k = A_1 (\lambda_1)^k + A_2 (\lambda_2)^k$$

e sostituendo

$$A^k = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}j \\ \frac{1}{2}j & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot (+j)^k + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}j \\ -\frac{1}{2}j & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot (-j)^k =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left[(+j)^k + (-j)^k\right] & \frac{1}{2}j\left[(-j)^k - (+j)^k\right] \\ \frac{1}{2}j\left[(+j)^k - (-j)^k\right] & \frac{1}{2}\left[(+j)^k + (-j)^k\right] \end{bmatrix}$$

$$x(k) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left[(+j)^k + (-j)^k\right] & \frac{1}{2}j\left[(-j)^k - (+j)^k\right] \\ \frac{1}{2}j\left[(+j)^k - (-j)^k\right] & \frac{1}{2}\left[(+j)^k + (-j)^k\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(0) \\ \bar{x}_2(0) \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\left[(+j)^k + (-j)^k\right] = \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^k\right)\cdot(j)^k$$

$$= \begin{cases} k \text{ pari } >0 \rightarrow \frac{1}{2}(1+1)(-1) = -1 \\ k = 0 \rightarrow \frac{1}{2}(1+1)\cdot 1 = +1 \\ k \text{ dispari} \rightarrow \frac{1}{2}(1-1)(j)^k = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}j\left[(-j)^k - (+j)^k\right] = \frac{1}{2}j\left[(j)^k\left((-1)^k - 1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}j^{k+1}\left[(-1)^k - 1\right]$$

per $k = 0, 2, 4 \ldots \longrightarrow \frac{1}{2}j^{k+1}(1-1) = 0$

per $k = 1, 3, 5, 7 \longrightarrow \frac{1}{2}j^{k+1}(-1-1) = -j^{k+1}$

$$\frac{1}{2}j\left[(+j)^k - (-j)^k\right] = -\frac{1}{2}j\left[(-j)^k - (+j)^k\right]$$

risposta $\textcircled{b}$

$$x(k) = A^k \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left[(+j)^k + (-j)^k\right] - \frac{1}{2}j\left[(-j)^k - (+j)^k\right] \\ \frac{1}{2}j\left[(+j)^k - (-j)^k\right] - \frac{1}{2}\left[(+j)^k + (-j)^k\right] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-j)^k\left[1 - j\right] + \frac{1}{2}(+j)^k\left[1 + j\right] \\ \frac{1}{2}(+j)^k\left[j - 1\right] - \frac{1}{2}(-j)^k\left[j + 1\right] \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}(+j)^k \begin{bmatrix} (-1)^k(1-j) + (1+j) \\ j - 1 - (-1)^k(1+j) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}(+j)^k \begin{bmatrix} (-1)^k(1-j) + 1 + j \\ -(-1)^k(1+j) + j - 1 \end{bmatrix}$$

$k=0 \qquad x(0) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \cancel{-j} + 1 \cancel{+j} \\ -1 \cancel{-j} \cancel{+j} - 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$k=1$

$$x(1) = \frac{1}{2} j \begin{bmatrix} (-1)(1-j) + 1+j \\ -(-1)(1+j) + j - 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} j \begin{bmatrix} \cancel{-1} + j + \cancel{1} + j \\ \cancel{+1} + j + j \cancel{-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} j \begin{bmatrix} 2j \\ 2j \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$k=2 \quad x(2) = \frac{1}{2} (+j)^2 \begin{bmatrix} (-1)^2 (1-j) + 1 + j \\ -(-1)^2 (1+j) + j - 1 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \cancel{-j} + 1 \cancel{+j} \\ -1 \cancel{-j} + \cancel{j} - 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

....

Domanda 2.2

Si vuole discretizzare per campionamento (con la tecnica di campionamento e tenuta) il sistema lineare a tempo continuo descritto dall'equazione differenziale a coefficienti costanti

$$\ddot{y}(t) + 2\,\dot{y}(t) - 4\,y(t) = +6\,u(t)$$

Determinare le matrici delle equazioni di stato del sistema discretizzato, utilizzando il valore $T_s = 2\ s$ per il periodo di campionamento.

Da equazione differenziale ad equazioni di stato:

$$\begin{cases} y(t) \triangleq x_1(t) \\ \dot{y}(t) \triangleq x_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 4x_1(t) - 2x_2(t) + 6u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

Matrici delle equazioni di stato

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ +6 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

Campionamento

(L1 - p175
L1 - p176)

$$A_d = e^{A_c \Delta}$$

$$B_d = \int_0^{\Delta} e^{A_c \tau} B_c \, d\tau$$

Δ periodo di campionamento

$\Delta = 2$

$$C_d = C_c \quad D_d = D_c$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \quad (sI - A_c) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ -4 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A_c) = s(s+2) - 4 = s^2 + 2s - 4$$

$$\lambda_1 = -1-\sqrt{5} \qquad \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+4}$$

$$\lambda_2 = -1+\sqrt{5} \qquad \lambda = -1 \pm \sqrt{5}$$

$$(sI - A_c)^{-1} = \frac{1}{s^2+2s-4} \begin{bmatrix} s+2 & +4 \\ +1 & s \end{bmatrix}^T =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s^2+2s-4} & \frac{1}{s^2+2s-4} \\ \frac{4}{s^2+2s-4} & \frac{s}{s^2+2s-4} \end{bmatrix}$$

A questo punto $e^{A_c t} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A_c)^{-1}\} \Longrightarrow$

$$\left[e^{A_c t}\right]_{(1,1)} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{\underset{(s-d_1)(s-d_2)}{s^2+2s-4}}\right\}$$

$d_1 = -1-\sqrt{5}$

$d_2 = -1+\sqrt{5}$

$$\frac{s+2}{s^2+2s-4} = \frac{c_1}{s+1+\sqrt{5}} + \frac{c_2}{s+1-\sqrt{5}}$$

$$c_1 = \lim_{s\to -1-\sqrt{5}} \frac{s+2}{(s+1-\sqrt{5})} = \frac{2-1-\sqrt{5}}{\cancel{-1}\cancel{+1}-\sqrt{5}-\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}{10}$$

$$c_2 = \lim_{s\to -1+\sqrt{5}} \frac{s+2}{s+1+\sqrt{5}} = \frac{2-1+\sqrt{5}}{\cancel{-1}+\sqrt{5}\cancel{+1}+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{10}$$

$$e^{A_c t}\Big|_{1,1} = \frac{\sqrt{5}}{10}\left\{(\sqrt{5}-1)e^{-(1+\sqrt{5})t} + (\sqrt{5}+1)e^{-(1-\sqrt{5})t}\right\}\cdot 1(t)$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{10}e^{-t}\left\{(\sqrt{5}-1)e^{-\sqrt{5}t} + (\sqrt{5}+1)e^{\sqrt{5}t}\right\}\cdot 1(t)$$

$$e^{A_c t}\Big|_{(2,1)} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+2s-4}\right\}$$

$$\frac{4}{s^2+2s-4} = \frac{c_1}{s+1+\sqrt{5}} + \frac{c_2}{s+1-\sqrt{5}}$$

$$c_1 = \lim_{s \to -1-\sqrt{5}} \frac{4}{(s+1-\sqrt{5})} = \frac{4}{\cancel{-1}-\sqrt{5}\cancel{+1}-\sqrt{5}}$$

$$= -\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}_{1}\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$c_2 = \lim_{s \to -1+\sqrt{5}} \frac{4}{(s+1+\sqrt{5})} = \frac{4}{\cancel{-1}+\sqrt{5}\cancel{+1}+\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}_{1}\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$e^{A_c t}\Big|_{(2,1)} = \mathcal{L}^{-1}\{\dots\} = \frac{2\sqrt{5}}{5}\left\{e^{-(1-\sqrt{5})t} - e^{-(1+\sqrt{5})t}\right\}\cdot 1(t)$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{5} e^{-t}\left[e^{\sqrt{5}t} - e^{-\sqrt{5}t}\right]\cdot 1(t)$$

$$e^{A_c t}\Big|_{(1,2)} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2s-4}\right\}$$

uso la linearità

$$= \frac{1}{\cancel{4}_{2}}\left\{\frac{\cancel{2}^{1}\sqrt{5}}{5}\, e^{-t}\left[e^{\sqrt{5}t} - e^{-\sqrt{5}t}\right]\cdot \mathbb{1}(t)\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{10}\, e^{-t}\left[e^{\sqrt{5}t} - e^{-\sqrt{5}t}\right]\cdot \mathbb{1}(t)$$

$$e^{A_c t}\Big|_{(2,2)} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2s-4}\right\}$$

$$\frac{s}{s^2+2s-4} = \frac{C_1}{s+1+\sqrt{5}} + \frac{C_2}{s+1-\sqrt{5}}$$

$$C_1 = \lim_{s\to -1-\sqrt{5}} \frac{s}{s+1-\sqrt{5}} = \frac{-(1+\sqrt{5})}{\cancel{-1}-\sqrt{5}\cancel{+1}-\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}(1+\sqrt{5})}{10}$$

$$C_2 = \lim_{s\to -1+\sqrt{5}} \frac{s}{s+1+\sqrt{5}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{\cancel{-1}+\sqrt{5}\cancel{+1}+\sqrt{5}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{(\sqrt{5}-1)\sqrt{5}}{10}$$

$$e^{At}\Big|_{(2,2)} = \frac{\sqrt{5}}{10}\left\{(1+\sqrt{5})\,e^{-(1+\sqrt{5})t} + (\sqrt{5}-1)\,e^{-(1-\sqrt{5})t}\right\}\cdot 1(t)$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{10}e^{-t}\left[(\sqrt{5}+1)e^{-\sqrt{5}t} + (\sqrt{5}-1)e^{-\sqrt{5}t}\right]\cdot 1(t)$$

$T_s = 2$ $\qquad A_d = e^{A_c T_s} = e^{2A_c}$

Sostituendo $t = T_s = 2$

$$A_d = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{10}e^{-2}\left[(\sqrt{5}-1)e^{-2\sqrt{5}} + (\sqrt{5}+1)e^{2\sqrt{5}}\right] & \frac{\sqrt{5}}{10}e^{-2}\left(e^{2\sqrt{5}} - e^{-2\sqrt{5}}\right) \\ \frac{2\sqrt{5}}{5}e^{-2}\left(e^{2\sqrt{5}} - e^{-2\sqrt{5}}\right) & \frac{\sqrt{5}}{10}e^{-2}\left[(\sqrt{5}+1)e^{-2\sqrt{5}} + (\sqrt{5}-1)e^{2\sqrt{5}}\right] \end{bmatrix}$$

Numericamente:

$$A_d \simeq \begin{bmatrix} 8{,}574 & 2{,}649 \\ 10{,}596 & 3{,}276 \end{bmatrix}$$

Infine

$$B_d = \int_0^{T_s} e^{A_c \tau} B_c \, d\tau = \int_0^{2} e^{A_c \tau} B_c \, d\tau = \#$$

$$C_d \equiv C_c \qquad D_d \equiv D_c$$

$\#$ A_c è invertibile $\rightarrow$ posso scrivere

$$B_d = A_c^{-1} \left[e^{A_c T_s} - I \right] B_c$$

$$= \begin{bmatrix} 11,36 \\ 15,89 \end{bmatrix}$$