PROVA SCRITTA DI SISTEMI DINAMICI
A.A. 2020/2021

1 luglio 2021

Nome e Cognome:	
gruppo:	Gruppo A
esercizio:	Esercizio 1

Note: Scrivere le risposte su un singolo foglio bianco usando penna nera. Non scrivere con inchiostro blu o a matita. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

Dichiaro che le risposte a questo esercizio sono frutto del mio e solo del mio lavoro e che non mi sono consultato con altri.

Soluzione

Domanda 1

Sono a disposizione i seguenti dati

t	1	2	3	4	5	6
y(t)	2.94	-1.49	-2.72	1.89	1.52	-1.76

ottenuti osservando l'evoluzione di un processo stocastico stazionario a valore atteso nullo.
Si considerino le due seguenti classi di modelli:

$$\mathcal{M}_1 \quad : \quad y(t) = a\, y(t-1) + \eta_1(t)\ , \qquad \eta_1(t) \sim WN(0, \lambda_1^2)$$

$$\mathcal{M}_2 \quad : \quad y(t) = b\, y(t-2) + \eta_2(t)\ , \qquad \eta_2(t) \sim WN(0, \lambda_2^2)$$

Si chiede di:

1. utilizzando i dati a disposizione, determinare la stima di a e di λ_1 utilizzando l'approccio PEM (a minimizzazione dell'errore di predizione);
2. utilizzando i dati a disposizione, determinare la stima di b e di λ_2 utilizzando l'approccio PEM (a minimizzazione dell'errore di predizione);
3. valutare il *Final Prediction Error* (FPE) e stabilire sulla base dei valori ottenuti quale sia la famiglia di modelli migliore per il processo stocastico da identificare sulla base dei dati a disposizione.

Soluzione

pto 1 modello $\mathcal{M}_1$ in forma di predittore ad 1 passo

$\mathcal{M}_1$ $y(t) = a\, y(t-1) + \eta_1(t)$

$$\hat{y}_{\mathcal{M}_1}(t|t-1) = a\, y(t-1)$$

Funzionale di costo per applicare PEM

$$J_{\mathcal{M}_1}(a) = \frac{1}{5}\sum_{t=2}^{6}\left[y(t) - \hat{y}_{\mathcal{M}_1}(t|t-1)\right]^2$$

La ottima è che minimizza il costo $J(a)$

la trovo con

$$\frac{dJ(a)}{da} = 0 = \frac{2}{5}\sum_{t=2}^{6}\left\{\left[y(t) - \hat{y}_{\mathcal{M}_1}(t|t-1)\right] \cdot \left[-y(t-1)\right]\right\}$$

$$\frac{dJ(a)}{da} = 0 = \frac{2}{5}\sum_{t=2}^{6}\left[y(t) - a\, y(t-1)\right]\left[-y(t-1)\right] = 0$$

Separo i termini:

$$-\sum_{t=2}^{6}\left[y(t)\, y(t-1)\right] + a\sum_{t=2}^{6}\left[y(t-1)\right]^2 = 0$$

$$\hat{a} = \frac{\sum_{2}^{6}{}_{t} \left[y(t)\, y(t-1) \right]}{\sum_{2}^{6}{}_{t} \left[y(t-1) \right]^2} =$$ sostituisco i valori delle osservazioni

$$\hat{a} = \frac{y(2)\cdot y(1) + y(3)\, y(2) + y(4)\, y(3) + y(5)\, y(4) + y(6)\, y(5)}{\left(y(1)\right)^2 + \left(y(2)\right)^2 + \left(y(3)\right)^2 + \left(y(4)\right)^2 + \left(y(5)\right)^2}$$

$$= \frac{-4{,}3806 + 4{,}0528 - 5{,}1408 + 2{,}8728 - 2{,}6752}{8{,}6436 + 2{,}2201 + 7{,}3984 + 3{,}5721 + 2{,}3104} = -0{,}2183$$

Come stima per $\hat{\lambda}_1^2$ uso il valore del costo

$$\hat{\lambda}_1^2 = J_{M_1}(\hat{a}) = \frac{1}{5} \sum_{2}^{6}{}_{t} \left[y(t) - \hat{a}\, y(t-1) \right]^2$$

$$= \frac{1}{5} \left\{ 0{,}7194 + 9{,}2737 + 1{,}6801 + 3{,}7350 + 2{,}0357 \right\}$$

$$= 3{,}4886$$

Hp (2) modello $\mathcal{M}_2$ $\quad y(t) = b\,y(t-2) + \eta_2(t)$

in forma di predittore

$$\hat{y}(t|t-2) = b\,y(t-2)$$

Costruisco il funzionale di costo

$$J_{\mathcal{M}_2}(b) = \frac{1}{4}\sum_{t=3}^{6}\left[y(t) - \hat{y}(t|t-2)\right]^2$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{t=3}^{6}\left[y(t) - b\,y(t-2)\right]^2$$

Per trovare il minimo del costo

$$\frac{dJ_{\mathcal{M}_2}(b)}{db} = 0 = \frac{1}{2}\sum_{t=3}^{6}\left\{\left[y(t) - b\,y(t-2)\right]\cdot\left[-y(t-2)\right]\right\}$$

Separo i contributi

$$-\sum_{t=3}^{6} y(t)\,y(t-2) + b\sum_{t=3}^{6}\left[y(t-2)\right]^2 = 0$$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{t=3}^{6} y(t)\,y(t-2)}{\sum_{t=3}^{6}\left[y(t-2)\right]^2} \Longrightarrow$$

$$\hat{b} = \frac{y(3)y(1) + y(4)y(2) + y(5)y(3) + y(6)y(4)}{(y(1))^2 + (y(2))^2 + (y(3))^4 + (y(4))^2}$$

$$= \frac{-7,9368 - 2,816 - 4,1349 - 3,3269}{8,6436 + 2,2201 + 5,3384 + 3,5721}$$

$$= -0,8369$$

Per stimare λ_2^2 come nell'altro caso voluto il costo ottimo

$$J_{M_2}(\hat{b}) = \frac{1}{4} \sum_{t=3}^{6} \left[y(t) - \hat{b}\, y(t-2) \right]^2$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ 0,0673 + 0,4134 + 0,5722 + 0,0318 \right\}$$

$$= 0,2712 = \lambda_2^2$$

Sistema "vero"

$$\mathcal{S}: \quad y(t) = -0,75\, y(t-2) + \varepsilon(t)$$

$$\varepsilon(t) \sim WN(0, 1)$$

③ l'indice FPE si calcola con

$$FPE(n) = \frac{N+n}{N-n} J(\hat{\vartheta}_N)^{(n)}$$

$N \longleftrightarrow$ n° dei dati

$n \longleftrightarrow$ n° di parametri del modello

nei casi considerati

$n=1 \longleftrightarrow \mathcal{M}_1$

$N=5$

$$FPE_{\mathcal{M}_1}(1) = \frac{5+1}{5-1} J_{\mathcal{M}_1}(\hat{a}) = \frac{6}{4} \cdot 3{,}4896 = 5{,}2344$$

$\mathcal{M}_2 \longleftrightarrow$

$N=4$

$n=1$

$$FPE_{\mathcal{M}_2}(1) = \frac{4+1}{4-1} J_{\mathcal{M}_2}(\hat{b}) = \frac{5}{3} \cdot 0{,}2712 = 0{,}4520$$

$FPE_{\mathcal{M}_2} < FPE_{\mathcal{M}_1} \Longrightarrow \mathcal{M}_2(\hat{b})$ è modello migliore di $\mathcal{M}_1(\hat{a})$ per il sistema!