

PROVA SCRITTA DI SISTEMI DINAMICI
A.A. 2021/2022

4 febbraio 2022

Nome e Cognome:

gruppo: Gruppo A

esercizio: Esercizio 1

Note: Scrivere le risposte su un singolo foglio bianco usando penna nera. Non scrivere con inchiostro blu o a matita. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

Dichiaro che le risposte a questo esercizio sono frutto del mio e solo del mio lavoro e che non mi sono consultato con altri.

Domanda 1

Si vuole stimare la grandezza incognita ϑ facendo uso di due osservazioni contemporanee

$$\begin{cases} d_1 = \vartheta + e_1 \\ d_2 = \vartheta + e_2 \end{cases}$$

dove e_1 ed e_2 sono variabili aleatorie a valore atteso nullo e varianza rispettivamente pari a

$$e_1 \Leftrightarrow E(e_1) = 0, \text{ var}(e_1) = \sigma_1^2 = 1$$

$$e_2 \Leftrightarrow E(e_2) = 0, \text{ var}(e_2) = \sigma_2^2 = 4$$

Vale inoltre che

$$\text{cov}(e_1, e_2) = \sigma_{12} = 0.75$$

e per la grandezza incognita

$$\vartheta \Leftrightarrow E(\vartheta) = 3, \text{ var}(\vartheta) = \sigma_\vartheta^2 = 2$$

Si vuole utilizzare lo stimatore dato da

$$\hat{\vartheta} = \frac{\left(\frac{d_1}{\sigma_1^2} + \frac{d_2}{\sigma_2^2}\right)}{\lambda} \quad \text{dove} \quad \lambda = \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}$$

Si chiede di

- (a) calcolare la polarizzazione della stima $\hat{\vartheta}$;
- (b) la varianza del relativo errore di stima;
- (c) uno stimatore lineare non polarizzato che assicuri una varianza dell'errore di stima inferiore (se possibile) a quella determinata in risposta alla domanda precedente. **Motivare la risposta.**

Domanda 2

Dato il processo stocastico descritto da

$$\mathcal{S} : \quad y(k) = u(k-1) + 1.2u(k-2) + \epsilon(k) \quad \epsilon(\cdot) \sim \text{WN}(0, 1) \quad u(\cdot) \sim \text{WN}(0, 1)$$

dove $u(k)$ e $\epsilon(k)$ sono scorrelati.

Si vuole identificare il sistema con l'approccio a minimizzazione dell'errore di predizione (PEM) e si sceglie come famiglia di modelli

$$\mathcal{M} : \quad y(k) = ay(k-1) + bu(k-1) + \eta(k) \quad \eta(\cdot) \sim \text{WN}(0, \lambda^2)$$

Supponendo di avere a disposizione un numero elevatissimo di dati osservati dal processo \mathcal{S} [**stima asintotica**]

1. identificare il modello nella famiglia \mathcal{M} che minimizza l'errore di predizione asintotico.

Che espressione ha l'errore di predizione? Commentare il risultato.

2. Come cambierebbe la soluzione se il processo \mathcal{S} fosse descritto da

$$\mathcal{S} : \quad y(k) = u(k-1) + \epsilon(k) \quad \epsilon(\cdot) \sim \text{WN}(0, 1) \quad u(\cdot) \sim \text{WN}(0, 1)$$

sempre con $u(k)$ e $\epsilon(k)$ scorrelati tra loro.

Che espressione avrebbe l'errore di predizione in questo caso? Commentare il risultato.