PROVA SCRITTA DI SISTEMI DINAMICI
A.A. 2021/2022

4 febbraio 2022

Nome e Cognome:

gruppo: Gruppo A

esercizio: Esercizio 1

Note: Scrivere le risposte su un singolo foglio bianco usando penna nera. Non scrivere con inchiostro blu o a matita. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

Dichiaro che le risposte a questo esercizio sono frutto del mio e solo del mio lavoro e che non mi sono consultato con altri.

Soluzione

Domanda 1

Si vuole stimare la grandezza incognita ϑ facendo uso di due osservazioni contemporanee

$$\begin{cases} d_1 &= \vartheta + e_1 \\ d_2 &= \vartheta + e_2 \end{cases}$$

dove e_1 ed e_2 sono variabili aleatorie a valore atteso nullo e varianza rispettivamente pari a

$$e_1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{E}(e_1) = 0\ ,\ \mathrm{var}(e_1) = \sigma_1^2 = 1$$

$$e_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{E}(e_2) = 0\ ,\ \mathrm{var}(e_2) = \sigma_2^2 = 4$$

Vale inoltre che

$$\mathrm{cov}(e_1\ ,\ e_2) = \sigma_{1\,2} = 0.75$$

e per la grandezza incognita

$$\vartheta \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{E}(\vartheta) = 3\ ,\ \mathrm{var}(\vartheta) = \sigma_\vartheta^2 = 2$$

Si vuole utilizzare lo stimatore dato da

$$\hat{\vartheta} = \frac{\left(\dfrac{d_1}{\sigma_1^2} + \dfrac{d_2}{\sigma_2^2}\right)}{\lambda} \qquad \text{dove} \quad \lambda = \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}$$

Si chiede di

(a) calcolare la polarizzazione della stima $\hat{\vartheta}$;

(b) la varianza del relativo errore di stima;

(c) uno stimatore lineare non polarizzato che assicuri una varianza dell'errore di stima inferiore (se possibile) a quella determinata in risposta alla domanda precedente. **Motivare la risposta**.

Riprendo $\hat{\vartheta}$

$$\hat{\vartheta} = \left(\frac{d_1}{\sigma_1^2} + \frac{d_2}{\sigma_2^2}\right) \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}} = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

$$= d_1 \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} + d_2 \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} =$$

$$= \underbrace{\frac{4}{5}}_{\alpha} d_1 + \underbrace{\frac{1}{5}}_{\beta} d_2 \qquad \alpha + \beta = 1$$

(a) errore di polarizzazione / stima

$$E[\vartheta - \hat{\vartheta}] = \underbrace{E[\vartheta]}_{\bar{\vartheta}} - E[\hat{\vartheta}] = \bar{\vartheta} - \bar{\vartheta} = 0$$

$$E[\hat{\vartheta}] = \alpha E[d_1] + \beta E[d_2] = (\alpha + \beta)\bar{\vartheta} = \bar{\vartheta}$$ no polarizzato

(b) varianza dell'errore di stima

$$\sigma^2_{\hat{\vartheta}} = E[\hat{\vartheta}^2] - (E[\hat{\vartheta}])^2 = E\left[\left(\alpha(\vartheta + e_1) + \beta(\vartheta + e_2)\right)^2\right] - \underbrace{\bar{\vartheta}^2}_{=\ldots}$$

$$= \alpha^2 E[(\vartheta+e_1)^2] + \beta^2 E[(\vartheta+e_2)^2] +$$

$$+ 2\alpha\beta E[(\vartheta+e_1)(\vartheta+e_2)] =$$

$$= \frac{16}{25}\left\{ E(\vartheta^2) + 2\cancelto{0}{E(\vartheta e_1)} + \overset{\sigma_1^2}{E(e_1^2)} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{25}\left\{ E(\vartheta^2) + 2\cancelto{0}{E(\vartheta e_2)} + \overset{\sigma_2^2}{E(e_2^2)} \right\} +$$

$$+ \frac{8}{25} E\left\{ \vartheta^2 + \cancelto{0}{e_1\vartheta} + \cancelto{0}{\vartheta e_2} + \overset{\sigma_{12}}{e_1 e_2} \right\} - \bar{\vartheta}^2$$

$$= \left(\frac{16}{25} + \frac{1}{25} + \frac{8}{25}\right) E(\vartheta^2) + \frac{16}{25}\sigma_1^2 + \frac{1}{25}\sigma_2^2 + \frac{\cancelto{2}{8}}{25} \cdot \frac{\cancelto{3}{75}}{\cancelto{1}{100}} - \bar{\vartheta}^2$$

$$= \underbrace{E(\vartheta^2) - \bar{\vartheta}^2}_{f_2} + \frac{16}{25}\cdot 1 + \frac{1}{25}\cdot 4 + \frac{6}{25}$$

$$= \sigma_\vartheta^2 + \frac{26}{25}$$

Quindi:

$$var(\vartheta - \hat{\vartheta}) = E[(\vartheta - \hat{\vartheta})^2] =$$

$$= E(\vartheta^2) + E(\hat{\vartheta}^2) - 2E(\vartheta\hat{\vartheta})$$

$$= E[\vartheta^2] + E[\hat{\vartheta}^2] - 2E[\vartheta(\alpha(\vartheta+e_1) + \beta(\vartheta+e_2))]$$

$\mathrm{var}(\theta - \hat{\theta}) =$

$$E[\theta^2] + E[\hat{\theta}^2] - 2E[\theta(\alpha(\theta + e_1) + \beta(\theta + e_2))]$$

$$= E[\theta^2] + E[\hat{\theta}^2] - 2\underbrace{(\alpha+\beta)}^{1} E[\theta^2] +$$

$$-2\alpha \underbrace{E(\cancel{\theta e_1})}_{0} - 2\beta \underbrace{E(\cancel{\theta e_2})}_{0}$$

$$= E[\hat{\theta}^2] - E[\theta^2] =$$

$$= \sigma_\theta^2 + \frac{26}{25} + \bar{\theta}^2 - [\sigma_\theta^2 + \bar{\theta}^2] = \frac{26}{25}$$

(c) lo stimatore lineare "ottimo"

L9 p 13-15

da L9 - p 14

$$\hat{\theta}_{BL} = \Lambda_{\theta d} \cdot \Lambda_{dd}^{-1}\, d$$

matrice di varianza

$$d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \qquad \Lambda_{dd} = \begin{bmatrix} \sigma_{d_1}^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{d_2}^2 \end{bmatrix}$$

$\sigma^2_{d_1} = ?$ $\qquad d_1 = \vartheta + e_1 \qquad \vartheta, e_1$ scorrelati

$$\operatorname{var} d_1 = \operatorname{var} \vartheta + \operatorname{var} e_1$$

$$\operatorname{var} d_1 = 2 + 1 = 3$$

$$\operatorname{var} d_2 = \operatorname{var} \vartheta + \operatorname{var} e_2 = 2 + 4 = 6$$

$$\operatorname{Cov}(d_1, d_2) = E\left[\left(d_1 - \underbrace{E(d_1)}_{\bar{\vartheta}}\right)\left(d_2 - \underbrace{E(d_2)}_{\bar{\vartheta}}\right)\right] =$$

$$= E\left\{(d_1 - \bar{\vartheta})(d_2 - \bar{\vartheta})\right\}$$

$$= E(d_1 d_2) + \bar{\vartheta}^2 - \bar{\vartheta}\, \overset{\bar{\vartheta}}{E d_2} - \bar{\vartheta}\, \overset{\bar{\vartheta}}{E d_1}$$

$$= E\left[(\vartheta + e_1)(\vartheta + e_2)\right] - \bar{\vartheta}^2$$

$$= E(\vartheta^2) + \overset{\sigma_{12}}{E(e_1 e_2)} + \overset{0}{\cancel{E(\vartheta e_1)}} + \overset{0}{\cancel{E(\vartheta e_2)}} - \bar{\vartheta}^2$$

$$\operatorname{var} \vartheta = \sigma^2_\vartheta$$

$$\Lambda_{dd} = \begin{bmatrix} 3 & 2{,}75 \\ 2{,}75 & 6 \end{bmatrix} \qquad \text{NB } \det \Lambda_{dd} > 0$$

$$\Lambda_{dd}^{-1} = \frac{1}{10{,}4375} \begin{bmatrix} 6 & -2{,}75 \\ -2{,}75 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_{\vartheta d} = \left[\mathrm{cov}(\vartheta d_1) \quad \mathrm{cov}(\vartheta d_2) \right]$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(\vartheta d_1) &= E\left[(\vartheta - \bar{\vartheta})(d_1 - \bar{\vartheta}) \right] \\
&= E(\vartheta d_1) - \bar{\vartheta} \underbrace{E d_1}_{\bar{\vartheta}} - \bar{\vartheta} \underbrace{E \vartheta}_{\bar{\vartheta}} + \bar{\vartheta}^2 \\
&= E\left[\vartheta (\vartheta + e_1) \right] - \bar{\vartheta}^2 \\
&= E(\vartheta^2) + \underbrace{E(\vartheta e_1)}_{\emptyset} - \bar{\vartheta} = \sigma_\vartheta^2
\end{aligned}$$

$$\operatorname{cov}(\theta\, d_2) = \underset{\text{analogo}}{\cdots} = \sigma_\theta^2$$

$$\hat{\theta}_{3L} = \left[\sigma_\theta^2 \quad \sigma_\theta^2\right] \frac{1}{10{,}4375} \begin{bmatrix} 6 & -7{,}75 \\ -7{,}75 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 - \bar{\theta} \\ d_2 - \bar{\theta} \end{bmatrix}$$

$$+ \bar{\theta}$$

$$\hat{\theta}_{3L} = \frac{104}{167} d_1 + \frac{8}{167} d_2 + \frac{55}{167} \bar{\theta}$$

$$\operatorname{var} \hat{\theta}_{3L} = \sigma_\theta^2 - \Lambda_{\theta d} \Lambda_{dd}^{-1} \Lambda_{d\theta}$$

L19-p16

Domanda 2

Dato il processo stocastico descritto da

$$\mathcal{S}\ :\qquad y(k) = u(k-1) + 1.2\,u(k-2) + \epsilon(k) \qquad \epsilon(\cdot) \sim \mathrm{WN}(0,\ 1) \quad u(\cdot) \sim \mathrm{WN}(0,\ 1)$$

dove $u(k)$ e $\epsilon(k)$ sono scorrelati.
Si vuole identificare il sistema con l'approccio a minimizzazione dell'errore di predizione (PEM) e si sceglie come famiglia di modelli

$$\mathcal{M}\ :\qquad y(k) = ay(k-1) + bu(k-1) + \eta(k) \qquad \eta(\cdot) \sim \mathrm{WN}(0, \lambda^2)$$

Supponendo di avere a disposizione un numero elevatissimo di dati osservati dal processo $\mathcal{S}$ [**stima asintotica**]

1. identificare il modello nella famiglia $\mathcal{M}$ che minimizza l'errore di predizione asintotico.

   Che espressione ha l'errore di predizione? Commentare il risultato.

2. Come cambierebbe la soluzione se il processo $\mathcal{S}$ fosse descritto da

   $$\mathcal{S}\ :\qquad y(k) = u(k-1) + \epsilon(k) \qquad \epsilon(\cdot) \sim \mathrm{WN}(0,\ 1) \quad u(\cdot) \sim \mathrm{WN}(0,\ 1)$$

   sempre con $u(k)$ e $\epsilon(k)$ scorrelati tra loro.

   Che espressione avrebbe l'errore di predizione in questo caso? Commentare il risultato.

$$J\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) =$$

$M \qquad y(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} y(k-1) & u(k-1) \end{bmatrix}}_{\varphi^T(k)} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{\theta} + \eta(k)$

$$\varepsilon_\theta(k) = y(k) - \hat{y}_\theta(k|k-1) = \dots$$

$$\bar{J} = E(\varepsilon_\theta^2) = E[y^2] + E[\hat{y}_\theta^2] +$$

$$-2E[y\,\hat{y}_\theta]$$

$$= \dots$$

$$\hat{y}(k|k-1) = a\,y(k-1) + b\,u(k-1)$$

$$\bar{J} = E\{y(k) - a\,y(k-1) - b\,u(k-1)\}^2 =$$

$$\bar{J} = E\left\{\left[u(k-1) + 1{,}2\, u(k-2) + \varepsilon(k) + \right.\right.$$
$$- a\left(u(k-2) + 1{,}2\, u(k-3) + \varepsilon(k-1)\right) +$$
$$\left.\left. - b\, u(k-1)\right]^2\right\} =$$

$$= E\left\{\left[(1-b)\, u(k-1) + (1{,}2-a)\, u(k-2) - 1{,}2a\, u(k-3) \right.\right.$$
$$\left.\left. + \varepsilon(k) - a\, \varepsilon(k-1)\right]^2\right\}$$

$$= \left[(1-b)^2 E(u^2) + (1{,}2-a)^2 E(u^2) + (1{,}2a)^2 E(u^2) + \right.$$
$$\left. + E(\varepsilon^2) + a^2 E(\varepsilon^2)\right]$$

$$\bar{J} = (1-b)^2 + (1{,}2-a)^2 + 1{,}44a^2 + 1 + a^2$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \bar{J}}{\partial a} & \dfrac{\partial \bar{J}}{\partial b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2(1{,}2-a) + 2{,}88a + 2a = 0 \\ -2(1-b) = 0 \end{cases} \qquad b = 1$$

$$\begin{cases} -2(1{,}2-a)+2{,}88a+2a=0 \\ -2(1-b)=0 \end{cases} \qquad b=1$$

$$-2{,}4+(4+2{,}88)a=0$$

$$a=\frac{\cancel{2{,}4}^{\,1{,}2}}{\cancel{2}(2+1{,}44)}=\frac{1.2}{3.44}\simeq 0{,}3488$$

ror ε_{pred} ?

$$\varepsilon_{pred}(k)=y(k)-\hat{y}(k|k-1)=$$

$$=\Big[\cancel{(1-b)}\,u(k-1)+(1{,}2-a)\,u(k-2)-1{,}2a\,u(k-3)+\varepsilon(k)-a\,\varepsilon(k-1)\Big]$$

$\hat{b}=1$ $\qquad$ $\hat{a}=0{,}3488$

$$=0{,}8512\,u(k-2)-0{,}4186\,u(k-3)+\varepsilon(k)-0{,}3488\,\varepsilon(k-1)$$

(b) $\mathcal{S}_e$ $\quad \sqrt{\varphi}: y(k) = u(k-1) + \varepsilon(k)$

$$y(k) - \hat{y}(k|k-1) =$$

$$= u(k-1) + \varepsilon(k) - a\,u(k-2) - a\,\varepsilon(k-1) - b\,u(k-1)$$

$$\bar{J} = (1-b)^2 \underbrace{E(u^2)}_{1} + a^2 \underbrace{E(u^2)}_{1} + 1 + a^2 \underbrace{E(\varepsilon^2)}_{1}$$

$$= (1-b)^2 + 1 + 2a^2$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{J}}{\partial a} & \frac{\partial \bar{J}}{\partial b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2(1-b) = 0 \\ 2a = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} b &= 1 \\ a &= 0 \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{pred} = \varepsilon(k)$$