

PROVA SCRITTA DI SISTEMI DINAMICI  
A.A. 2021/2022

18 febbraio 2022

**Nome e Cognome:**

**gruppo:** Gruppo A

**esercizio:** Esercizio 1

**Note:** Scrivere le risposte su un singolo foglio bianco usando penna nera. Non scrivere con inchiostro blu o a matita. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

Dichiaro che le risposte a questo esercizio sono frutto del mio e solo del mio lavoro e che non mi sono consultato con altri.

<b>Domanda 1</b>
------------------

Dato il processo stocastico descritto da

$$\mathcal{S} : \quad y(t) = a^o y(t-1) + b^o u(t-1) + \epsilon(t) \quad \epsilon(\cdot) \sim \text{WN}(0, 1)$$

si assuma che

$$u(t) = k y(t) \quad \forall t$$

cioè che esista una retroazione tra la variabile  $y(t)$  e l'ingresso manipolabile  $u(t)$ .

Si vuole identificare il sistema con l'approccio a minimizzazione dell'errore di predizione (PEM) e si sceglie come famiglia di modelli

$$\mathcal{M} : \quad y(k) = a y(k-1) + b u(k-1) + \eta(k) \quad \eta(\cdot) \sim \text{WN}(0, \lambda^2)$$

Supponendo di avere a disposizione  $N$  dati osservati dal processo  $\mathcal{S}$  si chiede di

- (a) mostrare che l'approccio a minimizzazione dell'errore di predizione (PEM) non permette di stimare correttamente i parametri  $a^o$  e  $b^o$ , analizzando le equazioni normali ai minimi quadrati del problema.
- (b) Che cosa si può dire a proposito della identificabilità del problema? Commentare il risultato.

**Domanda 2**

Si consideri il processo stocastico descritto dalla seguente rappresentazione in equazioni di stato

$$\begin{aligned}x(t+1) &= x(t) & x(t) \in \mathbb{R} \\ y(t) &= x(t) + v_2(t) & v_2(t) \sim \mathcal{G}(0, 4)\end{aligned}$$

Il rumore di processo  $v_1(t)$  è identicamente nullo e le matrici  $F$  e  $H$  valgono rispettivamente  $F = 1$ ,  $H = 1$ . Si chiede di

- (a) determinare il predittore di Kalman ad un passo  $\hat{x}(t+1|t)$ ;
- (b) indicato lo stato costante come  $\bar{x} = x(t)$ , si consideri la relazione

$$y(t) = \bar{x} + v_2(t) \quad v_2(t) \sim \mathcal{G}(0, 4)$$

e si supponga di aver osservato  $N$  valori di  $y$ . Determinare la stima ai minimi quadrati di  $\bar{x}$  e la sua incertezza.

- (c) confrontare e commentare i risultati ottenuti nei due casi.