

PROVA SCRITTA DI SISTEMI DINAMICI
A.A. 2021/2022

18 febbraio 2022

Nome e Cognome:

gruppo: Gruppo A

esercizio: Esercizio 1

Note: Scrivere le risposte su un singolo foglio bianco usando penna nera. Non scrivere con inchiostro blu o a matita. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

Dichiaro che le risposte a questo esercizio sono frutto del mio e solo del mio lavoro e che non mi sono consultato con altri.

Domanda 1

Dato il processo stocastico descritto da

$$\mathcal{S} : \quad y(t) = a^o y(t-1) + b^o u(t-1) + \epsilon(t) \quad \epsilon(\cdot) \sim \text{WN}(0, 1)$$

si assuma che

$$u(t) = k y(t) \quad \forall t$$

cioè che esista una retroazione tra la variabile $y(t)$ e l'ingresso manipolabile $u(t)$.

Si vuole identificare il sistema con l'approccio a minimizzazione dell'errore di predizione (PEM) e si sceglie come famiglia di modelli

$$\mathcal{M} : \quad y(k) = a y(k-1) + b u(k-1) + \eta(k) \quad \eta(\cdot) \sim \text{WN}(0, \lambda^2)$$

Supponendo di avere a disposizione N dati osservati dal processo \mathcal{S} si chiede di

- (a) mostrare che l'approccio a minimizzazione dell'errore di predizione (PEM) non permette di stimare correttamente i parametri a^o e b^o , analizzando le equazioni normali ai minimi quadrati del problema.
- (b) Che cosa si può dire a proposito della identificabilità del problema? Commentare il risultato.

Domanda 2

Si consideri il processo stocastico descritto dalla seguente rappresentazione in equazioni di stato

$$\begin{aligned}x(t+1) &= x(t) & x(t) \in \mathbb{R} \\ y(t) &= x(t) + v_2(t) & v_2(t) \sim \mathcal{G}(0, 4)\end{aligned}$$

Il rumore di processo $v_1(t)$ è identicamente nullo e le matrici F e H valgono rispettivamente $F = 1$, $H = 1$. Si chiede di

- (a) determinare il predittore di Kalman ad un passo $\hat{x}(t+1|t)$;
- (b) indicato lo stato costante come $\bar{x} = x(t)$, si consideri la relazione

$$y(t) = \bar{x} + v_2(t) \quad v_2(t) \sim \mathcal{G}(0, 4)$$

e si supponga di aver osservato N valori di y . Determinare la stima ai minimi quadrati di \bar{x} e la sua incertezza.

- (c) confrontare e commentare i risultati ottenuti nei due casi.