PROVA SCRITTA DI SISTEMI DINAMICI
A.A. 2021/2022

18 febbraio 2022

Nome e Cognome:	
gruppo:	Gruppo A
esercizio:	Esercizio 1

Note: Scrivere le risposte su un singolo foglio bianco usando penna nera. Non scrivere con inchiostro blu o a matita. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

Dichiaro che le risposte a questo esercizio sono frutto del mio e solo del mio lavoro e che non mi sono consultato con altri.

Soluzione

Domanda 1

Dato il processo stocastico descritto da

$$\mathcal{S} \; : \qquad y(t) = a^o\, y(t-1) + b^o\, u(t-1) + \epsilon(t) \qquad \epsilon(\cdot) \sim \mathrm{WN}(0,\ 1)$$

si assuma che

$$u(t) = k\, y(t) \quad \forall t$$

cioè che esista una retroazione tra la variabile $y(t)$ e l'ingresso manipolabile $u(t)$.
Si vuole identificare il sistema con l'approccio a minimizzazione dell'errore di predizione (PEM) e si sceglie come famiglia di modelli

$$\mathcal{M} \; : \qquad y(k) = a\, y(k-1) + b\, u(k-1) + \eta(k) \qquad \eta(\cdot) \sim \mathrm{WN}(0, \lambda^2)$$

Supponendo di avere a disposizione N dati osservati dal processo $\mathcal{S}$ si chiede di

(a) mostrare che l'approccio a minimizzazione dell'errore di predizione (PEM) non permette di stimare correttamente i parametri a^o e b^o, analizzando le equazioni normali ai minimi quadrati del problema.

(b) Che cosa si può dire a proposito della identificabilità del problema? Commentare il risultato.

Sostituisco $u(t) = k\,y(t)$

$$\Downarrow$$

$$y(t) = \underbrace{[a^\circ + k b^\circ]}_{\alpha}\, y(t-1) + \varepsilon(t)$$

È diventato un AR(1)!!! Riesco ad identificare α ma NON a°, b° separatamente ($\Leftrightarrow$ "∞" soluzioni per a°, b° tutte equivalenti)

Parto dalle eq. normali per il problema ARX

vettore dei regressori $\varphi_t = \begin{bmatrix} y(t-1) \\ u(t-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t-1) \\ k\,y(t-1) \end{bmatrix}$

$$S_N = \sum_{t=1}^{N} \varphi_t \varphi_t^T =$$

$$= \sum_{t=1}^{N} \begin{bmatrix} y(t-1) \\ k\,y(t-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t-1) & k\,y(t-1) \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{t=1}^{N} \begin{bmatrix} y^2(t-1) & k\,y^2(t-1) \\ k\,y^2(t-1) & k^2 y^2(t-1) \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$S_N(t) = \left[\sum_{t=1}^{N} y^2(t-1)\right] \begin{bmatrix} 1 & k \\ k & k^2 \end{bmatrix}$$

Ha rango 1 !!

S NON è invertibile !

identificabilità perduta !

Domanda 2

Si consideri il processo stocastico descritto dalla seguente rappresentazione in equazioni di stato

$$\begin{aligned} x(t+1) &= x(t) \qquad x(t) \in \mathbb{R} \\ y(t) &= x(t) + v_2(t) \qquad v_2(t) \sim \mathcal{G}(0,\ 4) \end{aligned}$$

Il rumore di processo $v_1(t)$ è identicamente nullo e le matrici F e H valgono rispettivamente $F = 1$, $H = 1$. Si chiede di

(a) determinare il predittore di Kalman ad un passo $\hat{x}(t+1|t)$;

(b) indicato lo stato costante come $\bar{x} = x(t)$, si consideri la relazione

$$y(t) = \bar{x} + v_2(t) \qquad v_2(t) \sim \mathcal{G}(0,\ 4)$$

e si supponga di aver osservato N valori di y. Determinare la stima ai minimi quadrati di $\bar{x}$ e la sua incertezza.

(c) confrontare e commentare i risultati ottenuti nei due casi.

Il sistema dinamico è:

$$x(t+1) = 1 \cdot x(t) + 0 \cdot v_1(t)$$

$$y(t) = 1 \cdot x(t) + v_2(t) \qquad v_2 \sim \mathcal{G}(0, 4)$$

Il predittore è

$$\hat{x}(t+1|t) = \hat{x}(t|t-1) + K(t)\left[y(t) - \hat{x}(t|t-1)\right]$$

$$K(t) = P(t)\left[P(t) + V_2\right]^{-1} = \frac{P(t)}{P(t)+4}$$

$$P(t+1) = 1 \cdot \left\{P(t) - P(t) \cdot 1\left[4 + P(t)\right]^{-1} \cdot 1 \cdot P(t)\right\} \cdot 1 + 0$$

$$P(t+1) = P(t) - \frac{P^2(t)}{4+P(t)}$$

con $\hat{x}(1|0) = 0 \qquad e(1) = y(1) - H\hat{x}(1|0) = y(1)$

$P(1) = \mathrm{var}[x(1)]$ ← NON è dato esplicito

$= P_1 > 0$ per es. $\sigma^2 \cdot I$

per $t \to \infty$ $\bar{P}(t) \to$? converge?

$$\cancel{\bar{P}} = \cancel{\bar{P}} - \frac{\bar{P}^2}{1+\bar{P}}$$

infatti unica soluzione $\bar{P} = 0$

NB: i teoremi di convergenza di ARE non valgono quindi non c'è garanzia

---

stima LS

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_i y_i$$

$$var\,\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_i (y_i - \bar{x})^2 \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$$