

PROVA SCRITTA DI SISTEMI DINAMICI
A.A. 2022/2023

3 febbraio 2023

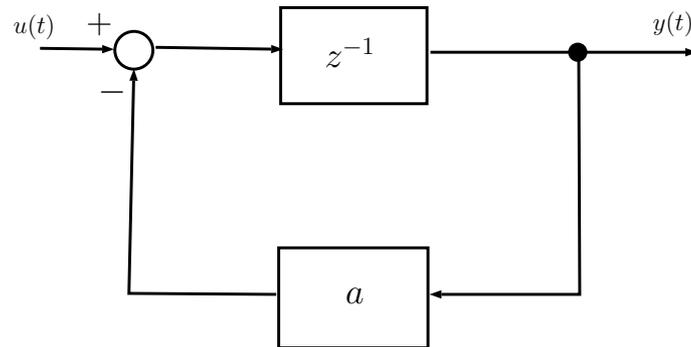
Nome e Cognome:	
gruppo:	Gruppo A
esercizio:	Esercizio 1

Note: Scrivere le risposte su un singolo foglio bianco usando penna nera. Non scrivere con inchiostro blu o a matita. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

Dichiaro che le risposte a questo esercizio sono frutto del mio e solo del mio lavoro e che non mi sono consultato con altri.

Domanda 1

Si consideri il sistema dinamico lineare descritto in figura



dove $u(t)$ è dato da

$$u(t) = \bar{u} + \epsilon(t), \quad \bar{u} = 1, \quad \epsilon(\cdot) \sim \text{WN}(0, 1)$$

mentre il parametro $a \in \mathbb{R}$ è incognito.

Si chiede di:

1. determinare l'insieme dei valori del parametro a per i quali il sistema a ciclo chiuso risulta stabile e di conseguenza il processo stocastico di $y(t)$ risulta stazionario. Determinare valore atteso e varianza del processo di $y(t)$ (in funzione del parametro a) quando il processo risulta stazionario.
2. individuare il valore del parametro a , all'interno dell'insieme determinato in precedenza, che garantisce la minimizzazione della varianza di $y(t)$.
3. determinare il valore del parametro a (sempre all'interno dell'insieme di valori che garantiscono la stazionarietà del processo stocastico di $y(t)$) che porta a minimizzare $E[(y(t))^2]$.

Commentare i risultati ottenuti.

Domanda 2

Si consideri il processo stocastico a tempo discreto descritto dallo schema a blocchi seguente

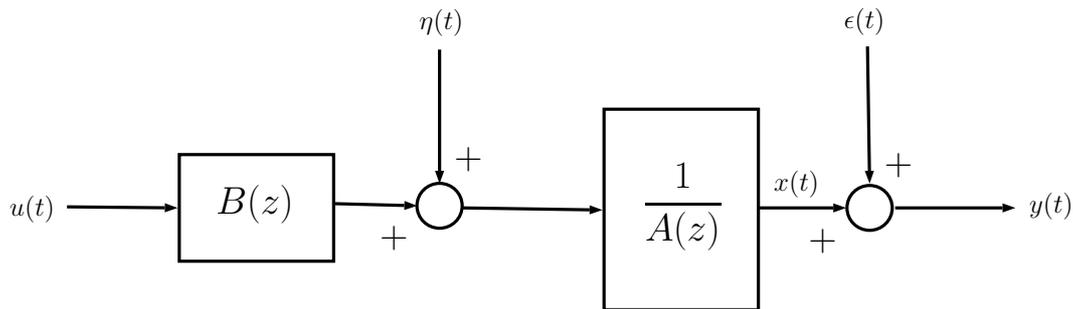


Figura 1: Schema a blocchi del processo stocastico oggetto di studio.

dove

$$A(z) = \left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right), \quad B(z) = z^{-1}, \quad u(t) = 1 \quad \forall t, \quad \eta(\cdot) \sim \text{WN}(0, 1), \quad \epsilon(\cdot) \sim \text{WN}(0, 1)$$

ed i due processi di rumore bianco sono indipendenti tra loro.

Rispondere alle domande seguenti, motivando adeguatamente le risposte

- Il processo stocastico della v.a. $x(t)$ è stazionario? E quello della v.a. $y(t)$ lo è? A quale famiglia appartengono rispettivamente il processo stocastico di $x(t)$ e di $y(t)$? Determinare valore atteso e varianza di $x(t)$ e $y(t)$.
- Che espressione ha il predittore ottimo ad un passo in avanti rispettivamente per $x(t)$ e per $y(t)$? Quanto vale la varianza dell'errore di predizione nei due casi?
- Si descriva ora il processo stocastico complessivo con le equazioni alle differenze e si supponga che $x(t)$ sia la variabile di stato del processo, mentre $y(t)$ sia l'uscita misurata (l'osservazione). Determinare l'espressione del predittore ottimo di Kalman ad un passo per lo stato del sistema.

[Solo per chi ha seguito il corso nell'anno acc. 2018/2019] Nella risposta alla domanda (c) considerare assenti nello schema di Fig. 1 il blocco $B(z)$ ed il segnale $u(t)$.