PROVA SCRITTA DI SISTEMI DINAMICI
A.A. 2022/2023

3 febbraio 2023

Nome e Cognome:	
gruppo:	Gruppo A
esercizio:	Esercizio 1

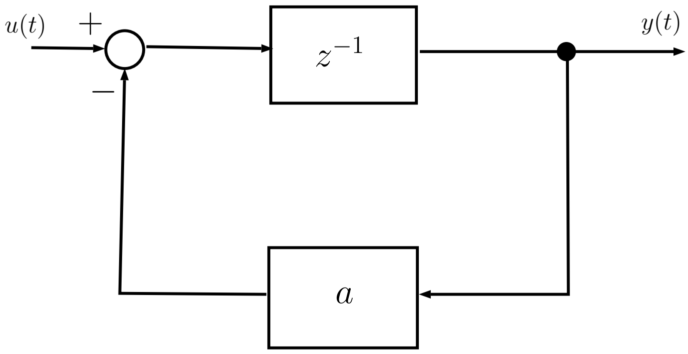
Note: Scrivere le risposte su un singolo foglio bianco usando penna nera. Non scrivere con inchiostro blu o a matita. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

Dichiaro che le risposte a questo esercizio sono frutto del mio e solo del mio lavoro e che non mi sono consultato con altri.

Soluzione

Domanda 1

Si consideri il sistema dinamico lineare descritto in figura



dove $u(t)$ è dato da

$$u(t) = \bar{u} + \epsilon(t)\ , \quad \bar{u} = 1\ , \quad \epsilon(\cdot) \sim \mathrm{WN}\,(0,\ 1)$$

mentre il parametro $a \in \mathbb{R}$ è incognito.

Si chiede di:

1. determinare l'insieme dei valori del parametro a per i quali il sistema a ciclo chiuso risulta stabile e di conseguenza il processo stocastico di $y(t)$ risulta stazionario. Determinare valore atteso e varianza del processo di $y(t)$ (in funzione del parametro a) quando il processo risulta stazionario.

2. individuare il valore del parametro a, all'interno dell'insieme determinato in precedenza, che garantisce la minimizzazione della varianza di $y(t)$.

3. determinare il valore del parametro a (sempre all'interno dell'insieme di valori che garantiscono la stazionarietà del processo sttocastico di $y(t)$) che porta a minimizzare $\mathrm{E}\left[(y(t))^2\right]$.

Commentare i risultati ottenuti.

(1) FdT $G(z) = \frac{z^{-1}}{1+az^{-1}} = \frac{1}{z+a}$

as. stabile se $|a| < 1$

Così $y(t)$ è processo stocastico stazionario

$$y(t) = -a\,y(t-1) + u(t-1)$$

$$(1+az^{-1})y(t) = z^{-1}u(t)$$

$$y(t) = -a\,y(t-1) + \bar{u} + \eta(t-1)$$

$$E[y(t)] = \bar{y} = \bar{u} \cdot \frac{1}{1+a} \qquad \bar{y} = G(1)\cdot\bar{u}$$

$$\bar{y} = -a\bar{y} + \bar{u} + \phi$$

var y $\quad \text{var}\,y = \text{var}[-a\,y(t-1)] + \text{var}\,\bar{u} + \text{var}[\eta(t-1)]$

$$= a^2\,\text{var}\,y + \phi + 1$$

$$\text{var}\,y\,(1-a^2) = 1 \qquad \text{var}\,y = \frac{1}{1-a^2}$$

(2) $\hat{a} = \arg\min \operatorname{var} y$

$$\operatorname{var}[y] = \sigma_y^2 = \frac{1}{1-a^2}$$

$$\min \sigma_y^2 \Leftrightarrow \max 1-a^2$$

per $a = 0$ //

NB così è processo bianco ///

(3) $$E[y^2] = \operatorname{var}[y] + (E[y])^2$$

cfr. proprietà varianza

$$= \frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{(1+a)^2} = \frac{1+a+1-a}{(1-a)(1+a)^2} =$$

$$= \frac{2}{(1-a)(1+a)^2}$$

$$\min E[y^2] \longleftrightarrow \max (1-a)(1+a)^2$$

$$-1 < a < 1$$

per $a = 1 \rightarrow 0$ Teo di Rolle $\rightarrow$ max interno

$a = -1 \rightarrow 0$

$-1 < a < 1 \rightarrow > 0$

$$\frac{df}{da} = 0 \qquad -(1+a)^2 + 2(1-a)(1+a) = 0$$

$$-1 - 2a - a^2 + 2 - 2a^2 = 0$$

$$-3a^2 - 2a + 1 = 0$$

$$3a^2 + 2a - 1 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{3} = \frac{-1 \pm 2}{3} \begin{cases} +1/3 \\ -1 \quad \text{N.Acc.} \end{cases}$$

Domanda 2

Si consideri il processo stocastico a tempo discreto descritto dallo schema a blocchi seguente

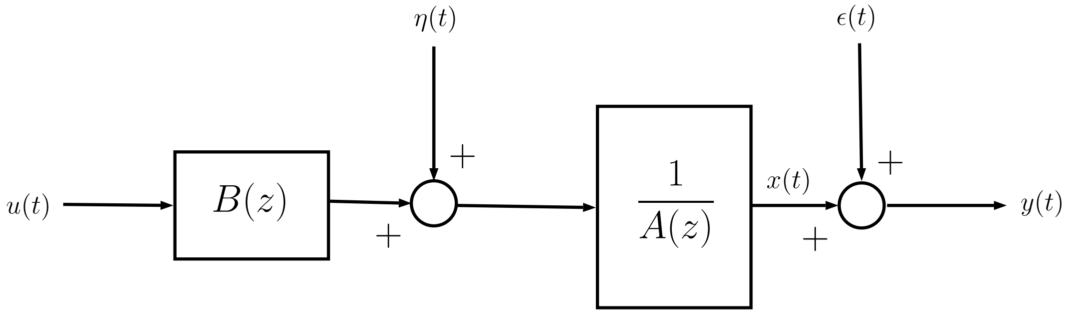


Figura 1: Schema a blocchi del processo stocastico oggetto di studio.

dove

$$A(z) = \left(1 + \frac{1}{4} z^{-1}\right)\ ,\ B(z) = z^{-1}\,, \qquad u(t) = 1\ \forall t\,,\ \eta(\cdot) \sim \mathrm{WN}\,(0,\,1)\ ,\ \epsilon(\cdot) \sim \mathrm{WN}\,(0,\,1)$$

ed i due processi di rumore bianco sono indipendenti tra loro.

Rispondere alle domande seguenti, motivando adeguatamente le risposte

(a) Il processo stocastico della v.a. $x(t)$ è stazionario? E quello della v.a. $y(t)$ lo è? A quale famiglia appartengono rispettivamente il processo stocastico di $x(t)$ e di $y(t)$? Determinare valore atteso e varianza di $x(t)$ e $y(t)$.

(b) Che espressione ha il predittore ottimo ad un passo in avanti rispettivamente per $x(t)$ e per $y(t)$? Quanto vale la varianza dell'errore di predizione nei due casi?

(c) Si descriva ora il processo stocastico complessivo con le equazioni alle differenze e si supponga che $x(t)$ sia la variabile di stato del processo, mentre $y(t)$ sia l'uscita misurata (l'osservazione). Determinare l'espressione del predittore ottimo di Kalman ad un passo per lo stato del sistema.

[Solo per chi ha seguito il corso nell'anno acc. 2018/2019] Nella risposta alla domanda (c) considerare assenti nello schema di Fig. 1 il blocco $B(z)$ ed il segnale $u(t)$.

(a)

$$A(z)\,x(t) = B(z)\,u(t) + \eta(t)$$

$\downarrow$

$p_1 = -\frac{1}{4} \longrightarrow x(\cdot)$ è $ARX(1,1)$ stazionario

$y(t) = x(t) + \varepsilon(t)$ è stazionario //

sempre $ARX(1,1)$

$E(x) \longrightarrow \quad x(t) = -\frac{1}{4}x(t-1) + u(t-1) + \eta(t)$

$E(x) = \bar{x} \qquad \bar{x} = -\frac{1}{4}\bar{x} + 1 + \phi$

$$\bar{x} = \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{B(1)}{A(1)}\cdot\bar{u}$$

$$= \frac{4}{5}\bar{u} = \frac{4}{5} \text{ //}$$

$\bar{y} = \bar{x}$ //

$\mathrm{var}\,x \Rightarrow \qquad \mathrm{var}\,x = \frac{1}{16}\mathrm{var}\,x + \phi + 1$

$$\mathrm{var}\,x = \frac{1}{1-\frac{1}{16}}\cdot 1 = \frac{16}{15} \text{ //}$$

$y = x + \varepsilon$ $\quad x, \varepsilon$ indep!

$$\operatorname{var} y = \operatorname{var} x + \operatorname{var} \varepsilon = \frac{16}{15} + 1 = \frac{31}{15}$$

(b) $\hat{x}(t|t-1) = ?$ $\qquad \hat{y}(t|t-1) = ?$

$$\hat{x}(t|t-1) = [1 \cdot A(t)]\, x(t) + B(t)\, u(t-1)$$

$$= -\frac{1}{4} x(t-1) + \underbrace{u(t-1)}_{\bar{u}}$$

$$\hat{y}(t|t-1) = \hat{x}(t|t-1)$$

time shift!

(c)

$$\begin{cases} x(t+1) = -\frac{1}{4} x(t) + \bar{u} + \eta(t) \\ y(t) = x(t) + \varepsilon(t) \end{cases}$$

$F = -\frac{1}{4}$ $\qquad V_1 = 1$

$H = 1$ $\qquad V_2 = 1$

$$F = -\frac{1}{4} \qquad H = +1 \qquad V_1 = +1 \qquad V_2 = +1$$

$\bar{u} = +1$

$$\hat{x}(t+1|t) = -\frac{1}{4}\,\hat{x}(t|t-1) + K(t)\cdot\left[y(t) - \hat{x}(t|t-1)\right]$$

$$K(t) = \left(-\frac{1}{4}\right)P(t)\cdot 1\left[1\cdot P(t)\cdot 1 + 1\right]^{-1}$$

$$= -\frac{1}{4}P(t)\cdot\frac{1}{1+P(t)}$$

$$P(t+1) = \left[-\frac{1}{4} - K(t)\cdot 1\right]P(t)\left[-\frac{1}{4} - K(t)\cdot 1\right] + 1 + K(t)\cdot 1\cdot K(t)$$