

PROVA SCRITTA DI SISTEMI DINAMICI  
A.A. 2022/2023

20 giugno 2023

**Nome e Cognome:**

**gruppo:** Gruppo unico

**esercizio:** Esercizio 1

**Note:** Scrivere le risposte su un singolo foglio bianco usando penna nera. Non scrivere con inchiostro blu o a matita. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

Dichiaro che le risposte a questo esercizio sono frutto del mio e solo del mio lavoro e che non mi sono consultato con altri.

**Domanda 1**

Si consideri il processo stocastico a tempo discreto descritto dal modello

$$\begin{cases} w(t) &= 0.25w(t-1) + \eta(t-1) \\ y(t) &= w(t) - 2w(t-1) \end{cases} \quad \eta(\cdot) \sim \text{WN}(0, 4) \quad (1)$$

Rispondere alle seguenti domande:

1. A quale famiglia di processi stocastici a spettro razionale appartiene il processo descritto in Eq. 1?
2. Il processo stocastico descritto in Eq. 1 è stazionario? Motivare la risposta.
3. Quanto valgono il valore atteso  $E[y(t)]$  e la varianza  $\text{var}[y(t)]$  della variabile aleatoria  $y(t)$  del processo?
4. Il processo stocastico è in forma canonica oppure no? Nel caso in cui non sia in forma canonica, determinare la descrizione in forma canonica per il processo stocastico analizzato.
5. Determinare il predittore ottimo a due passi in avanti, alimentato dalle osservazioni nel passato della v.a.  $y$ .

<b>Domanda 2</b>
------------------

Si consideri il sistema dinamico a tempo discreto descritto dalle equazioni di stato seguenti

$$\begin{cases} x(t+1) &= -3x(t) + v_1(t) \\ y(t) &= -x(t) + 2v_2(t) \end{cases} \quad (2)$$

dove

$$v_1(t) \sim \text{WN}(0, 4), \quad v_2(t) \sim \text{WN}(0, 1)$$

Inoltre  $v_1(t)$  e  $v_2(t)$  sono scorrelati tra loro ed anche scorrelati dalla condizione iniziale  $x(0)$ .

Si chiede di:

1. determinare l'espressione del predittore ottimo di Kalman ad un passo in avanti  $\hat{x}(t+1|t)$  al generico istante di tempo  $t$ ;
2. determinare inoltre l'espressione del predittore di Kalman a 2 passi in avanti  $\hat{x}(t+2|t)$ ;
3. che cosa si può dire a proposito della varianza dell'errore di predizione nel caso del predittore a 2 passi in avanti rispetto alla varianza dell'errore di predizione del predittore ad 1 passo in avanti? Sono uguali? Oppure? **Motivare la risposta.**