PROVA SCRITTA DI SISTEMI DINAMICI
A.A. 2022/2023

20 giugno 2023

Nome e Cognome:	
gruppo:	Gruppo unico
esercizio:	Esercizio 1

Note: Scrivere le risposte su un singolo foglio bianco usando penna nera. Non scrivere con inchiostro blu o a matita. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

Dichiaro che le risposte a questo esercizio sono frutto del mio e solo del mio lavoro e che non mi sono consultato con altri.

Soluzione

Domanda 1

Si consideri il processo stocastico a tempo discreto descritto dal modello

$$\begin{cases} w(t) = 0.25w(t-1) + \eta(t-1) \\ y(t) = w(t) - 2\,w(t-1) \end{cases} \qquad \eta(\cdot) \sim \mathrm{WN}\,(0,\,4) \tag{1}$$

Rispondere alle seguenti domande:

1. A quale famiglia di processi stocastici a spettro razionale appartiene il processo descritto in Eq. 1?
2. Il processo stocastico descritto in Eq. 1 è stazionario? Motivare la risposta.
3. Quanto valgono il valore atteso $\mathrm{E}[y(t)]$ e la varianza $\mathrm{var}\,[y(t)]$ della variabile aleatoria $y(t)$ del processo?
4. Il processo stocastico è in forma canonica oppure no? Nel caso in cui non sia in forma canonica, determinare la descrizione in forma canonica per il processo stocastico analizzato.
5. Determinare il predittore ottimo a due passi in avanti, alimentato dalle osservazioni nel passato della v.a. y.

Utilizzando la z-trasformata

$$\begin{cases} w(t) = \frac{1}{4} z^{-1} w(t) + z^{-1} \eta(t) \\ y(t) = w(t)\left[1 - 2z^{-1}\right] \end{cases} \qquad \eta(\cdot) \sim WN(0,4)$$

$$w(t)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right) = z^{-1}\eta(t)$$

$$w(t) = \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}\,\eta(t)$$

$$w(t) = \frac{1}{z - \frac{1}{4}}\,\eta(t)$$

sostituisco nella 2ª espressione

$$y(t) = \frac{z-2}{z} \cdot \frac{1}{z - \frac{1}{4}} \cdot \eta(t)$$

$$= \underbrace{\frac{(z-2)}{z\left(z - \frac{1}{4}\right)}}_{F(z)}\,\eta(t)$$

1 è un processo ARMA $\begin{pmatrix} n_a = 2 \\ n_c = 1 \end{pmatrix}$

2 è processo stazionario! $F(z)$ è as. stabile; in ingresso rumore proc. stazion.

$$y(t+2) = \frac{1}{4} y(t+1) + \eta(t+1) - 2\eta(t)$$

$\circledast$

$$\operatorname{var}[y(t+2)] = E\left[\left(y(t+2) - 0\right)^2\right] =$$

$$= E\Big[\frac{1}{16}\left(y(t+1)\right)^2 + \left(\eta(t+1)\right)^2 + 4\left(\eta(t)\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} y(t+1)\eta(t+1) - y(t+1)\eta(t) +$$

$$- 4\eta(t+1)\eta(t) \Big] = \circledast$$

$$y(t+1) = \frac{1}{4} y(t) + \eta(t) - 2\eta(t-1)$$

$$E[y(t+1)\eta(t+1)] = \emptyset$$

$$E[\eta(t+1)\eta(t)] = \emptyset$$

rumore bianco

$$E[y(t+1)\eta(t)] = \frac{1}{4}\underbrace{E[y(t)\eta(t)]}_{\emptyset} + \underbrace{E[\eta^2(t)]}_{\operatorname{var}\eta} - 2\underbrace{E[\eta(t)\eta(t-1)]}_{\emptyset}$$

$$\circledast\ \frac{1}{16}\underbrace{E[y^2(t+1)]}_{\sigma_y^2} + \overbrace{E[\eta^2(t+1)]}^{\sigma_\eta^2} + 4\overbrace{E[\eta^2(t)]}^{\sigma_\eta^2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\cancel{E[y(t+1)\eta(t+1)]}^{\emptyset} - \overbrace{E[y(t+1)\eta(t)]}^{\sigma_\eta^2} +$$

$$\emptyset\ \cancel{- 4E[\eta(t+1)\eta(t)]} =$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{16}\sigma_y^2 + \cancel{\sigma_q^2} + 4\sigma_q^2 + \phi - \cancel{\sigma_q^2} + \phi$$

$$\left(1 - \frac{1}{16}\right)\sigma_y^2 = 4\sigma_q^2$$

$$\sigma_y^2 = \frac{16 \cdot 4}{15} \cdot \sigma_q^2$$

calcolo della varianza σ_y^2 risultato nel pross foglio

(3) $E[y] = ?$ $\qquad E[\eta] = 0 \Rightarrow E[y] = 0$

var $y = ?$

$$\text{var}\, y = \sigma_y^2$$

è processo stazionario

$$z\left(z - \frac{1}{4}\right) y(t) = (z-2)\,\eta(t)$$

$$y(t+2) = \frac{1}{4} y(t+1) + \eta(t+1) - 2\eta(t)$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{16}\sigma_y^2 + \sigma_\eta^2 + 4\sigma_\eta^2 - \sigma_\eta^2$$

(*) vedi fogli precedenti

$$\frac{15}{16}\sigma_y^2 = 5\sigma_\eta^2$$

$$\sigma_y^2 = \frac{16}{15} \cdot 4 \cdot 4 = \frac{256}{15} \qquad (\simeq 17{,}0667)$$

(4) NO! Non è in forma canonica!

$$F(z) = \frac{z-2}{z\left(z-\frac{1}{4}\right)} \qquad \frac{N(z)}{D(z)}$$

(4) NO! Non è in forma canonica!

$$F(z) = \frac{z-2}{z\left(z-\frac{1}{4}\right)} \qquad \frac{N(z)}{D(z)}$$

$N(z), D(z)$ polinomi monici ✓

$N(z), D(z)$ hanno lo stesso grado NO!

$N(z), D(z)$ sono coprimi ✓

poli e zeri hanno TUTTI modulo < 1 NO!

Per determinare la forma canonica:

$$(\cdot) \qquad \bar{F}(z) = F(z) \cdot z = \frac{z-2}{z-\frac{1}{4}}$$

per il Teorema della fattorizzazione spettrale lo spettro complesso del processo NON cambia!

NB NON è ancora in forma canonica

$$\tilde{F}(z) = \frac{z-2}{z-\frac{1}{4}}$$

zero con $|\cdot| > 1$!

Utilizzo un filtro passa-tutto $T(z) = \dfrac{z-\frac{1}{2}}{z-2}$

$$\mathcal{B} \quad T(z) = \rho \, \frac{z+a}{z+\frac{1}{a}}$$

$\rho = 1$ finchè vogliamo $N(z), D(z)$ polinomi monici!

Significa che cambierà la varianza del processo di rumore bianco in ingresso

$$\tilde{F}(z) = \frac{\cancel{z-2}}{z-\frac{1}{4}} \cdot \frac{z-\frac{1}{2}}{\cancel{z-2}} = \frac{z-1/2}{z-1/4} \qquad \text{ARMA} \quad n_a = 1 \quad n_c = 1$$

Processo di rumore bianco in ingresso: varianza

spettro complesso del processo

$$\phi(z) = F(z) \cdot F(z^{-1}) \cdot \lambda_\eta^2 = \tilde{F}(z) \cdot \tilde{F}(z^{-1}) \, \lambda_\varepsilon^2$$

FdT originaria

rumore in ingresso

FdT in forma canonica

nuovo processo bianco in ingresso

$$\phi(z) = \frac{z-2}{\cancel{z}\cancel{\left(z-\frac{1}{4}\right)}} \; \frac{z^{-1}-2}{\cancel{z^{-1}}\cancel{\left(z^{-1}-\frac{1}{4}\right)}} \cdot 4 =$$

$$\frac{\left(z-\frac{1}{2}\right)}{\cancel{\left(z-\frac{1}{4}\right)}} \; \frac{\left(z^{-1}-\frac{1}{2}\right)}{\cancel{\left(z^{-1}-\frac{1}{4}\right)}} \; \hat{\lambda}^2 \qquad \cancel{\left(z-\frac{1}{4}\right)\left(z^{-1}-\frac{1}{4}\right)}$$

$$4\,(z-2)\,(z^{-1}-2) = \hat{\lambda}^2\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z^{-1}-\frac{1}{2}\right)$$

$$4\left[1-2z-2z^{-1}+4\right] = \hat{\lambda}^2\left[1-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}\right]$$

$$4\cdot\left(5-2z-\frac{2}{z}\right) = \hat{\lambda}^2\left[\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]$$

$$20-8\left(z+\frac{1}{z}\right) = \hat{\lambda}^2\left[\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{z^2+1}{z}\right]$$

$$\begin{cases} \frac{5}{4}\hat{\lambda}^2 = 20 \\ \frac{\hat{\lambda}^2}{2} = 8 \end{cases} \qquad \hat{\lambda}^2 = 16$$

varianza del nuovo processo di rumore bianco in ingresso

NB zero in $+2$ $(a=-2)$

$\lambda_\eta^2 = 4 \qquad \hat{\lambda}^2 = \lambda_\eta^2 \cdot a^2 = 4\cdot 4 = 16$

$$\varepsilon(\cdot) \longrightarrow \boxed{\dfrac{z-1/2}{z-1/4}} \longrightarrow y(\cdot)$$

processo in forma canonica

$\lambda_\varepsilon^2 = 16$

$\varepsilon(\cdot) \sim WN(0,16)$

(5) predittore a 2 passi alimentato dai dati

(a) trovo il predittore a 2 passi alimentato del processo di rumore bianco

(b) applico in cascata il filtro sbiancante

$$
\begin{array}{l|l}
z - \frac{1}{2} & z - \frac{1}{4} \\
\hline
-z + \frac{1}{4} & 1 - \frac{1}{4} z^{-1} \\
\hline
/ \;\; -\frac{1}{4} & \\
\quad +\frac{1}{4} - \frac{1}{16} z^{-1} & \\
\hline
/ \;\; -\frac{1}{16} z^{-1} &
\end{array}
$$

$$\hat{F}(z) = \frac{z - 1/2}{z - 1/4} = \underbrace{1 - \frac{1}{4} z^{-1}}_{} + z^{-2} \cdot \frac{-1/16}{z - \frac{1}{4}}$$

$$E(z) + z^{-2} \cdot \frac{(-1/16)}{\left(z - \frac{1}{4}\right)}$$

$$\tilde{F}_2(z) = -\frac{1/16}{z - \frac{1}{4}}$$

predittore ottimo e 2 passi alimentato da rumore

Usando il filtro sbiancante

$$F_2(z) = -\frac{1/16}{\cancel{z - \frac{1}{4}}} \cdot \frac{\cancel{z - 1/4}}{z - 1/2} = -\frac{1/16}{z - 1/2}$$

Domanda 2

Si consideri il sistema dinamico a tempo discreto descritto dalle equazioni di stato seguenti

$$\begin{cases} x(t+1) &= -3\,x(t) + v_1(t) \\ y(t) &= -x(t) + 2\,v_2(t) \end{cases} \tag{2}$$

dove

$$v_1(t) \sim \mathrm{WN}\,(0,\,4)\;, \quad v_2(t) \sim \mathrm{WN}\,(0,\,1)$$

Inoltre $v_1(t)$ e $v_2(t)$ sono scorrelati tra loro ed anche scorrelati dalla condizione iniziale $x(0)$.

Si chiede di:

1. determinare l'espressione del predittore ottimo di Kalman ad un passo in avanti $\hat{x}(t+1|t)$ al generico istante di tempo t;
2. determinare inoltre l'espressione del predittore di Kalman a 2 passi in avanti $\hat{x}(t+2|t)$;
3. che cosa si può dire a proposito della varianza dell'errore di predizione nel caso del predittore a 2 passi in avanti rispetto alla varianza dell' errore di predizione del predittore ad 1 passo in avanti? Sono uguali? Oppure? **Motivare la risposta**.

Per confronto con

(1)

$$\begin{cases} x(t+1) = F x(t) + v_1(t) \\ y(t) = H x(t) + v_2(t) \end{cases}$$

(# L13-p32)

$$\begin{cases} F = -3 \\ H = -1 \\ V_1 = 4 \\ V_2 = 4 \end{cases}$$

$v_1(\cdot) \sim G(0, V_1)$

$v_2(\cdot) \sim G(0, V_2)$

il predittore ad 1 passo è:

$$\hat{x}(t+1|t) = -3\,\hat{x}(t|t-1) + K(t)\left[y(t) - \left(-\hat{x}(t|t-1)\right)\right]$$

con:

$$K(t) = (-3)\cdot P(t)\cdot(-1)\left[(-1)\,P(t)\,(-1) + 4\right]^{-1}$$

$$= 3 \cdot \frac{P(t)}{P(t)+4}$$

e $P(t+1) =$

$$= (-3)\left\{P(t) - P(t)(-1)\frac{1}{4+(-1)P(t)(-1)}(-1)P(t)\right\}(-3) + 4$$

cioè:

$$P(t+1) = 9\left\{P(t) - \frac{P^2(t)}{4+P(t)}\right\} + 4$$

Riassumendo:

$$\begin{cases} \hat{x}(t+1|t) = -3\,\hat{x}(t|t-1) + K(t)\left[y(t) - \left(-\hat{x}(t|t-1)\right)\right] \\ K(t) = 3 \cdot \dfrac{P(t)}{P(t)+4} \\ P(t+1) = 9\left\{P(t) - \dfrac{P^2(t)}{4+P(t)}\right\} + 4 \end{cases}$$

A partire dal filtro ottimo ad 1 passo ottengo

(2)

$$\begin{cases} \hat{x}(t+2|t) = F\,\hat{x}(t+1|t) \\ \hat{y}(t+2|t) = H\,\hat{x}(t+2|t) \end{cases}$$

e nel caso in questione:

$$\hat{x}(t+2|t) = (-3)\,\hat{x}(t+1|t)$$

(3) varianza dell'errore di predizione per il predittore ad 1 passo → $P(t)$

per il predittore a 2 passi?

$\times$ il predittore ad 1 passo nel caso considerato

$$E\left[x(t) - \hat{x}(t|t-1)\right]^2 = P(t)$$

per il predittore a 2 passi: ?

$$E\left[x(t)-\hat{x}(t|t-2)\right]^2 =$$

$$E\left[F x(t-1)+v_1(t-1)-F\hat{x}(t-1|t-2)\right]^2 =$$

$$= E\left\{F\left[x(t-1)-\hat{x}(t-1|t-2)\right]+v_1(t-1)\right]^2 =$$

sono scorrelati

$$= F^2 P(t) + V_1$$

Dato che $|F| > 1$ allora l'incertezza di stima del predittore a 2 passi è maggiore di $P(t)$

NB Mi aspetterei che succeda qualcosa del tipo:

allungando l'orizzonte di predizione l'incertezza di stima non può diminuire o restare costante