# PROVA SCRITTA DI SISTEMI DINAMICI
A.A. 2022/2023

18 luglio 2023

| | |
|---|---|
| **Nome e Cognome:** | |
| **gruppo:** | Gruppo unico |
| **esercizio:** | Esercizio 1 |

**Note:** Scrivere le risposte su un singolo foglio bianco usando penna nera. Non scrivere con inchiostro blu o a matita. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

Dichiaro che le risposte a questo esercizio sono frutto del mio e solo del mio lavoro e che non mi sono consultato con altri.

**Domanda 1**

Si consideri il processo stocastico a tempo discreto descritto dal modello

$$\mathcal{S}: \qquad y(t+1) = 0.25y(t) + \epsilon(t) \qquad \epsilon(\cdot) \sim \mathrm{WN}\,(4,\,1) \tag{1}$$

Supponendo di avere a disposizione moltissime osservazioni (stima asintotica), si vuole identificare il miglior modello della famiglia

$$(M): \qquad y(t+1) = a\,y(t) + \eta(t) \qquad \eta(\cdot) \sim \mathrm{WN}\left(0,\,\lambda^2\right)$$

Determinare la stima ottima del parametro $\hat{a}$ e della varianza di rumore del modello $\hat{\lambda}^2$.

Discutere i risultati ottenuti.

Si supponga ora che il rumore $\epsilon(\cdot)$ presente nel processo stocastico $\mathcal{S}$ abbia le caratteristiche seguenti

$$\epsilon(\cdot) \sim \mathrm{WN}\,(0,\,1)$$

Cambierebbe qualcosa per quanto riguarda le stime ottime $\hat{a}$ e $\hat{\lambda}^2$? Motivare la risposta.

**Domanda 2**

Si consideri il sistema dinamico a tempo discreto descritto dalle equazioni di stato seguenti

$$\begin{cases} x_1(t+1) & = & -0.25\, x_1(t) + v_{1,\,1}(t) \\ x_2(t+1) & = & +0.10\, x_2(t) + v_{1,\,2}(t) \\ y(t) & = & -x_2(t) + v_2(t) \end{cases} \tag{2}$$

dove il rumore di misura è un processo stocastico caratterizzato da

$$v_2(t) \sim \text{WGN}\,(0,\ 2)$$

mentre per il rumore di processo vale che

$$v_{1,\,1}(t) \sim \text{WGN}\,(0,\ 1)\ \ ,\quad v_{1,\,2}(t) \sim \text{WGN}\,(0,\ 1)$$

e i due rumori $v_{1,\,1}(\cdot)$ e $v_{1,\,2}(\cdot)$ sono scorrelati tra loro

$$\text{cov}\,(v_{1,\,1}\ ,v_{1,\,2}) = 0$$

ed indipendenti da $v_2(\cdot)$.

Si chiede di:

1. determinare l'espressione del **predittore** ottimo di Kalman di **regime**. Si assuma $\hat{x}\,(1|0) = [0\ ,\ 0]^T$ e $P(1) = I_2$ (matrice identica di ordine 2).
2. Che cosa si può dire a proposito della varianza dell'errore di predizione? Ed a proposito del guadagno $\bar{K}$ del filtro di Kalman di regime che cosa si può dire?
3. Si supponga ora di poter sostituire il sensore di misura con cui si misura $x_2(t)$ e si fornisce l'uscita $y(t)$ con un dispositivo differente, che misuri sempre $x_2(t)$, ma con prestazioni migliori, cioé con rumore di misura $\tilde{v}_2(t)$ con varianza molto più piccola

   $$\tilde{v}_2 \sim \text{WGN}\,(0,\ 1/100)$$

   Ci si aspetta una riduzione dell'incertezza di stima rispettivamente per $\hat{x}_1$ e per $\hat{x}_2$ oppure no? **Motivare la risposta**.