PROVA SCRITTA DI SISTEMI DINAMICI
A.A. 2022/2023

18 luglio 2023

Nome e Cognome:	
gruppo:	Gruppo unico
esercizio:	Esercizio 1

Note: Scrivere le risposte su un singolo foglio bianco usando penna nera. Non scrivere con inchiostro blu o a matita. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

Dichiaro che le risposte a questo esercizio sono frutto del mio e solo del mio lavoro e che non mi sono consultato con altri.

Soluzione

Domanda 1

Si consideri il processo stocastico a tempo discreto descritto dal modello

$$\mathcal{S}: \qquad y(t+1) = 0.25y(t) + \epsilon(t) \qquad \epsilon(\cdot) \sim \mathrm{WN}\,(4,\, 1) \tag{1}$$

Supponendo di avere a disposizione moltissime osservazioni (stima asintotica), si vuole identificare il miglior modello della famiglia

$$(M): \qquad y(t+1) = a\,y(t) + \eta(t) \qquad \eta(\cdot) \sim \mathrm{WN}\left(0,\, \lambda^2\right)$$

Determinare la stima ottima del parametro $\hat{a}$ e della varianza di rumore del modello $\hat{\lambda}^2$.

Discutere i risultati ottenuti.

Si supponga ora che il rumore $\epsilon(\cdot)$ presente nel processo stocastico $\mathcal{S}$ abbia le caratteristiche seguenti

$$\epsilon(\cdot) \sim \mathrm{WN}\,(0,\, 1)$$

Cambierebbe qualcosa per quanto riguarda le stime ottime $\hat{a}$ e $\hat{\lambda}^2$? Motivare la risposta.

$\mathcal{S}: \quad y(t) = \frac{1}{4} y(t-1) + \bar{\nu} + \nu(t-1)$

$\varepsilon(t) \triangleq \bar{\nu} + \nu(t)$

$\bar{\nu} = 4 \qquad \nu(\cdot) \sim WN(0,1)$

$y(t) = \frac{1}{4} y(t-1) + 4 + \nu(t-1)$

$\mathcal{M}: \quad \hat{y}(t|t-1) = a\, y(t-1)$

Costo asintotico $\quad \bar{J}(a) = E\left\{ \left[y(t) - \hat{y}(t|t-1) \right]^2 \right\}$

Per $\mathcal{S}$: è ARX stazionario ($A(z)$ Hurwitz)

$E[y] = \frac{1}{4} E[y] + 4$

$\bar{y} = \frac{1}{4}\bar{y} + 4 \qquad \frac{3}{4}\bar{y} = 4 \qquad \bar{y} = E[y] = \frac{16}{3}$

$\text{var}\, y = \sigma_y^2 = E\left[(y - \bar{y})^2\right] = E(y^2) - (\bar{y})^2$

$E(y^2) = E\left[\frac{1}{16} y^2(t-1) + 16 + \nu^2(t-1) + 2y(t-1) + \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{4}_2} y(t-1) \cdot \nu(t-1) \right]$

$= \frac{1}{16} E(y^2) + 16 + 1 + 2\bar{y} + \emptyset$

$\frac{15}{16} E(y^2) = 17 + \frac{32}{3} = 83/3$

$$E(y^2) = \frac{16}{15} \cdot \frac{83}{3} = \frac{1328}{45}$$

Ora

$$\bar{J}(a) = E\left\{ y^2(t) + \hat{y}^2(t|t-1) - 2y(t)\hat{y}(t|t-1) \right\}$$

$$= E(y^2(t)) + a^2 E[y^2(t-1)] - 2a\,E[y(t)y(t-1)]$$

$$= (1+a^2)E[y^2] - 2a\,E[y(t)y(t-1)]$$

$$\frac{d\bar{J}}{da} = 0 \iff 2a\,E[y^2] - 2\,E[y(t)y(t-1)] = 0$$

$$\hat{a} = \frac{E[y(t)y(t-1)]}{E[y^2]}$$

$$E[y(t)y(t-1)] = E\left[\frac{1}{4}y^2(t-1) + 4y(t-1) + \eta(t-1)y(t-1)\right]$$

$$= \frac{1}{4}E(y^2) + 4\bar{y} + \emptyset =$$

$$= \frac{1}{\cancel{4}_1} \cdot \frac{\cancel{1328}^{332}}{45} + 4 \cdot \frac{16}{3} =$$

$$= \frac{332}{45} + \frac{64}{3} = \frac{332 + 64 \cdot 15}{45} = \frac{1292}{45}$$

$$\hat{a} = \frac{1292}{\cancel{45}_{1}} \cdot \frac{\cancel{45}^{1}}{1328} = \frac{\cancel{1292}^{323}}{\cancel{1328}_{332}} = \frac{323}{332} \simeq 0,973$$

$$\hat{\lambda}^2 = \bar{J}(\hat{a}) = (1+\hat{a}^2)\,E[y^2] - 2\hat{a}\,E[y(t)y(t-1)]$$

$$= \left[1+\left(\frac{323}{332}\right)^2\right] \cdot \frac{1328}{45} - 2 \cdot \frac{323}{332} \cdot \frac{1292}{45}$$

$$\simeq 1,578$$

Sia $\hat{a}$ che $\hat{\lambda}^2$ sono polarizzate!

Caso (1b)

$$\hat{a} \to a$$
$$\hat{\lambda}^2 \to 1$$

!!!

Domanda 2

Si consideri il sistema dinamico a tempo discreto descritto dalle equazioni di stato seguenti

$$\begin{cases} x_1(t+1) &= -0.25\, x_1(t) + v_{1,1}(t) \\ x_2(t+1) &= +0.10\, x_2(t) + v_{1,2}(t) \\ y(t) &= -x_2(t) + v_2(t) \end{cases} \tag{2}$$

dove il rumore di misura è un processo stocastico caratterizzato da

$$v_2(t) \sim \mathrm{WGN}\,(0,\ 2)$$

mentre per il rumore di processo vale che

$$v_{1,1}(t) \sim \mathrm{WGN}\,(0,\ 1)\ , \quad v_{1,2}(t) \sim \mathrm{WGN}\,(0,\ 1)$$

e i due rumori $v_{1,1}(\cdot)$ e $v_{1,2}(\cdot)$ sono scorrelati tra loro

$$\mathrm{cov}\,(v_{1,1}\ , v_{1,2}) = 0$$

ed indipendenti da $v_2(\cdot)$.

Si chiede di:

1. determinare l'espressione del **predittore** ottimo di Kalman di **regime**. Si assuma $\hat{x}\,(1|0) = [0\ ,\ 0]^T$ e $P(1) = I_2$ (matrice identica di ordine 2).
2. Che cosa si può dire a proposito della varianza dell'errore di predizione? Ed a proposito del guadagno $\bar{K}$ del filtro di Kalman di regime che cosa si può dire?
3. Si supponga ora di poter sostituire il sensore di misura con cui si misura $x_2(t)$ e si fornisce l'uscita $y(t)$ con un dispositivo differente, che misuri sempre $x_2(t)$, ma con prestazioni migliori, cioé con rumore di misura $\tilde{v}_2(t)$ con varianza molto più piccola

   $$\tilde{v}_2 \sim \mathrm{WGN}\,(0,\ 1/100)$$

   Ci si aspetta una riduzione dell'incertezza di stima rispettivamente per $\hat{x}_1$ e per $\hat{x}_2$ oppure no? **Motivare la risposta**.

1° passo: scrivo le equazioni in forma matriciale

$$\begin{cases} x(t+1) = F x(t) + v_1(t) \\ y(t) = H x(t) + v_2(t) \end{cases}$$

$$F = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & +\frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$v_1(t) = \begin{bmatrix} v_{11}(t) \\ v_{12}(t) \end{bmatrix} \qquad V_2 = 2$$

V_1 → (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

V_1 → (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

I° teorema di convergenza di DRE

F ha autovalori $-\frac{1}{4}$, $+\frac{1}{10}$ → sistema AS. STABILE

$\Downarrow$

$\forall P_1 \geq 0$ DRE → ARE con la stessa $\bar{P} \geq 0$

NB $P_1 = I_2 > 0$! Posso applicare il Teo 1 !

ARE:

$$\bar{P} = F\left[\bar{P} - \bar{P}H^T\left(V_2 + H\bar{P}H^T\right)^{-1}H\bar{P}\right]F^T + V_1$$

da risolvere nel caso (a) e (b) [cambia solo V_1]

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_4 \end{bmatrix}$$ simmetrica $\bar{P} > 0$

$$\begin{cases} P_1 > 0 \\ P_1 P_4 - P_2^2 > 0 \\ P_1 P_4 > P_2^2 \end{cases}$$

$$\bar{P} H^T = \bar{P} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P_2 \\ -P_4 \end{bmatrix}$$

$$H\bar{P} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \bar{P} = \begin{bmatrix} -P_2 & -P_4 \end{bmatrix}$$

$$H\bar{P}H^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \bar{P} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -P_2 \\ -P_4 \end{bmatrix} = P_4$$

$$\left[\bar{P} - \bar{P}H^T (V_2 + H\bar{P}H^T)^{-1} H\bar{P}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -P_2 \\ -P_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -P_2 & -P_4 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{(P_4+2)}$$

$$= \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_2^2 & P_2 P_4 \\ P_2 P_4 & P_4^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{(P_4+2)}$$

$$= \begin{bmatrix} P_1 - \frac{P_2^2}{P_4+2} & P_2 - \frac{P_2 P_4}{P_4+2} \\ P_2 - \frac{P_2 P_4}{P_4+2} & P_4 - \frac{P_4^2}{P_4+2} \end{bmatrix}$$

$$F\left[\ldots\right]F^T =$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & +\frac{1}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 - \frac{P_2^2}{P_4+2} & P_2 - \frac{P_2 P_4}{P_4+2} \\ P_2 - \frac{P_2 P_4}{P_4+2} & P_4 - \frac{P_4^2}{P_4+2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & +\frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & +\frac{1}{10} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}\left(P_1 - \frac{P_2^2}{P_4+2}\right) & \frac{1}{10}\left(P_2 - \frac{P_2 P_4}{P_4+2}\right) \\ -\frac{1}{4}\left(P_2 - \frac{P_2 P_4}{P_4+2}\right) & \frac{1}{10}\left(P_4 - \frac{P_4^2}{P_4+2}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{16}\left(P_1 - \frac{P_2^2}{P_4+2}\right) & -\frac{1}{40}\left(P_2 - \frac{P_2 P_4}{P_4+2}\right) \\ -\frac{1}{40}\left(P_2 - \frac{P_2 P_4}{P_4+2}\right) & \frac{1}{100}\left(P_4 - \frac{P_4^2}{P_4+2}\right) \end{bmatrix}$$

A questo punto nei 2 casi:

$$\bar{P} = F\left[\ldots\right]F^T + \begin{cases} V_1^{(2)} \\ V_1^{(1)} \end{cases}$$

caso ②

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{1}{16}\left(P_1 - \frac{P_2^2}{P_4+2}\right) & -\frac{1}{40}\left(P_2 - \frac{P_2 P_4}{P_4+2}\right) \\ -\frac{1}{40}\left(P_2 - \frac{P_2 P_4}{P_4+2}\right) & \frac{1}{100}\left(P_4 - \frac{P_4^2}{P_4+2}\right) \end{bmatrix}$$

quindi:

$$\begin{cases} P_1 = 1 + \frac{1}{16}\left(P_1 - \frac{P_2^2}{P_4+2}\right) \\ P_2 = -\frac{1}{40}\left(P_2 - \frac{P_2 P_4}{P_4+2}\right) \\ P_4 = 1 + \frac{1}{100}\left(P_4 - \frac{P_4^2}{P_4+2}\right) \end{cases}$$

← elaboro questa

$$-40 P_2 = P_2 \left[1 - \frac{P_4}{P_4+2}\right]$$

← AB 2 casi

① $P_2 = 0$

② $P_2 \neq 0$

(1) $P_2 = 0 \Rightarrow \quad P_1 = 1 + \frac{1}{16} P_1$

$$\frac{15}{16} P_1 = 1 \qquad P_1 = \frac{16}{15}$$

$$100 P_4 = 100 + P_4 - \frac{P_4^2}{P_4+2}$$

$$P_4^2 + 99 P_4 (P_4+2) - 100(P_4+2) = 0$$

$$100 P_4^2 + 198 P_4 - 100 P_4 - 200 = 0$$

$$100 P_4^2 + 98 P_4 - 200 = 0$$

$$P_4 = \left(-49 \pm \sqrt{2401 + 20000}\right)\frac{1}{100}$$

$$= \frac{-49 \pm \sqrt{22401}}{100} \begin{cases} \simeq 1{,}00669 \\ < 0 \text{ NON acc.} \end{cases}$$

Caso (1) 1ª possibile soluzione ARE

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 16/15 & 0 \\ 0 & (\sqrt{22401} - 49)/100 \end{bmatrix}$$

caso (2) $P_2 \neq 0$

$$-40 = \left[1 - \frac{P_4}{P_4+2}\right] = \frac{P_4 + 2 - P_4}{P_4+2}$$

$$-40 = \frac{2}{P_4+2}$$

$$-20 = \frac{1}{P_4+2} \rightarrow P_4+2 = -\frac{1}{20}$$

$$P_4 = -2-\frac{1}{20}$$ NON ACC.

simmetrica

$\bar{P} > 0$ $\begin{cases} P_1 > 0 \\ P_1 P_4 > P_2^2 \end{cases} \Rightarrow P_4 > 0$

NO soluzione!

caso (2) → solo soluzione

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 16/15 & 0 \\ 0 & (\sqrt{22401}-49)/100 \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1,0667 & 0 \\ 0 & 1,0067 \end{bmatrix}$$

incertezza su x_1 maggiore di quella su x_2

NON ci sono osservazioni su x_1 → il filtro evolve usando il modello!

lo si vede benissimo dal guadagno $\bar{K}$:

$$\bar{K} = F\bar{P}H^T(H\bar{P}H^T+V_2)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{P_4}{10(P_4+2)} \end{bmatrix}$$