Simulazione scritto di Geometria

January 9, 2024

1. Si dica per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare è compatibile:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= a \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= b \\ x_1 + x_3 &= 1 \\ x_2 - x_3 &= 2, \end{cases}$$
e per tali valori di a e b si determini la sua generica soluzione.

2. Siano
$$A \in M_{m,n}(\mathbb{K}), \quad S \in GL(m, \mathbb{K}), \quad T \in GL(n, \mathbb{K}).$$
Si dimostri che A e $S \cdot A \cdot T$ hanno lo stesso rango.

3. Si consideri lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^2$ con il prodotto scalare standard. Usando opportuni vettori e la definizione di ortogonalità, si dimostri che:
   (a) le due diagonali di un rombo (parallelogramma equilatero) sono ortogonali;
   (b) il Teorema di Talete: l'angolo opposto al diametro in un triangoloiscritto in una semicirconferenza è un angolo retto.

4. Siano f e g endomorfismi di uno spazio vettoriale tali che
$$f \circ g = g \circ f.$$
Sia $\mathrm{Aut}_f(\lambda)$ un autospazio di f. Si dimostri che
$$g(\mathrm{Aut}_f(\lambda)) \subseteq \mathrm{Aut}_f(\lambda).$$

5. Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di uno spazio vettoriale V e sia $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ la base duale di $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$. Si dimostri che per ogni $v \in V$ e per ogni $f \in V^*$ si ha
$$v = v_1^*(v)v_1 + \cdots + v_n^*(v)v_n,$$
$$f = f(v_1)v_1^* + \cdots + f(v_n)v_n^*.$$